UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Cours et travaux dirigés:
Tuna Altınel

Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche Un long exercice

15 décembre 2009

Exercice 1.
Voici une fonction que nous avons déjà rencontrée :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

I. *Généralités sur f*

I.1 Si vous ne l'avez pas encore fait, vérifiez la continuité de f en tous les points de $\mathbb{R}^2$.

I.2 Vérifiez que les dérivées partielles existent en tous les points et déterminez-les. Vous en aurez besoin dans la deuxième partie de l'exercice. Rappelons qu'au point $(0,0)$, f a des dérivées directionnelles dans toutes les directions

I.3 Même si vous l'avez déjà fait, vérifiez que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

II. *La géométrie du graphe de f*

Cette partie a pour objectif de comprendre “la tête” de f. Pour comprendre à quoi ressemble le graphe d'une application, c'est une bonne pratique de “couper” celui-ci le long des *hyperplans*. Comme le graphe de f est situé dans $\mathbb{R}^3$, dans notre cas particulier il s'agit des coupes le long de cetains plans.

II.1 Commençons par des choix évidents. Déterminez l'intersection du graphe de f avec les plans xy $(z = 0)$, xz $(y = 0)$ et yz $(x = 0)$.

II.2 Maintenant, nous pouvons nous concentrer sur des coupes parallèles aux plans mais distantes de ceux-ci. Fixons d'abord $x = t \in \mathbb{R}^*$. Ceci nous donne l'application à une variable :

$$f_{1,t} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \frac{t^3}{t^2+y^2} \quad .$$

$f_{1,t}$ correspond bien sûr à une ligne de niveau de f dans le plan yz. Etudions $f_{1,t}$. Supposons $t \in \mathbb{R}_+^*$.

- Vérifiez que $f_{1,t}$ est une application paire qui admet un maximum global au point $y = 0$. Notons que, si vous avez déjà fait la première partie, vous avez déjà déterminé la dérivée nécessaire.
- Calculer $\lim_{y\to+\infty} f_{1,t}(y)$. En déduire la limite à $-\infty$. Tracer le graphe de $f_{1,t}$.
- Déduire des symétries de f et des points précédents le graphe de $f_{1,t}$ quand $t \in \mathbb{R}_-^*$.
- Qu'est-ce que vous observez à propos de la famille des courbes $(f_{1,t})_{t\in\mathbb{R}^*}$ quand t tend vers 0.

II.3 Maintenant coupons parallèlement au plan xz. En d'autres termes, nous fixons $y \in \mathbb{R}^*$. Ceci donne l'application suivante :

$$f_{2,t} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^3}{x^2+t^2} \quad .$$

Chaque application $f_{2,t}$ correspond à une ligne de niveau dans le plan xz.

- Vérifiez que $f_{2,t}$ est une application impaire.

- Calculez la dérivée de $f_{2,t}$ et déterminez son comportement au point où cette dérivée s'annule. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f_{2,t}(x)$. En déduire la limite à $-\infty$. Tracer le graphe de $f_{2,t}$.
- Qu'est-ce que vous observez à propos de la famille des courbes $(f_{2,t})_{t\in\mathbb{R}^*}$ quand t tend vers 0.

II. 4 Finalement, coupons parallèlement au plan xy. En d'autres termes, nous fixons $z \in \mathbb{R}^*$. La situation est différente des points II.2 et II.3 quoiqu'il s'agisse de l'étude de certaines lignes de niveau, cette fois-ci dans le plan xy et définies par

$$z = \frac{x^3}{x^2+y^2} \ .$$

- Vérifier que pour toute valeur de réelle de y le théorème des fonctions implicites s'applique et qu'en conséquence chaque ligne de niveau déterminée par $t = \frac{x^3}{x^3+y^2}$ est le graphe d'une application implicite de la forme $x = f_{3,t}(y)$.
- Vérifiez en explicitant deux applications différentes que la conclusion du point précédent n'est pas vraie si on veut exprimer y en fonction de x.
- Montrer que $f_{3,t}$ est une application paire.
- Calculez la dérivée $f_{3,t}$. Déterminez le comportement de $f_{3,t}$ au seul point où sa dérivée s'annule. Calculez $\lim_{y\to+\infty} f_{3,t}(y)$. Déduisez-en la limite à $-\infty$. Tracer le graphe de $f_{3,t}$.
- Qu'est-ce que vous observez à propos de la famille des courbes $(f_{3,t})_{t\in\mathbb{R}^*}$ quand t tend vers 0.

III. Essayez de tracer le graphe de f en vous basant sur les données de la partie II.

IV. *Cette dernière partie a pour but d'observer quelques symptômes visuels de la non différantiabilité de f en $(0,0)$.*

Définissons une application F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccl} F \ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} - z & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Evidemment, le graphe de f correspond à la "surface" de niveau $F(x,y,z) = 0$.

- Déterminez les dérivées partielles de F par rapport à toutes ses trois variables à tous les points de $\mathbb{R}^3$.
- Montrez que le plan tangent au graphe de f en $(0,0,0)$ est $z = x$.
- Montrez que le plan tangent au graphe de f en $(0,y,0)$ avec $y \neq 0$ est $z = 0$.
- Remarquez que quand y tend vers 0, le plan tangent correspondant ne tend pas vers celui au point$(0,0,0)$. Ce ne serait pas le cas si f était différentiable au point $(0,0,0)$.