UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Cours et travaux dirigés:
Tuna Altınel

Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche 1

6 octobre 2009

Exercice 1 (Espaces métriques).
Soit X un ensemble non vide. Une *métrique* dans X est une fonction $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ayant les propriétés suivantes :

(D1) pour tous $x, y \in X$, $x = y$ si et seulement si $d(x, y) = 0$;

(D2) pour tous x et $y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(D3) (Inégalité triangulaire) pour tous $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La structure (X, d) est dit *un espace métrique.*

1. Montrer que toute norme induit une métrique et que par conséquent tout espace normé est un espace métrique.
2. Montrer que tout ensemble X non vide peut être muni d'une métrique. En conclure, en explicitant un exemple, qu'il existe un ensemble X et une métrique dans X qui n'est induite par aucune norme.
3. Montrer que la fonction suivante définit une métrique dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cccc} d & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x, y) & \longmapsto & \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \end{array}$$

   Montrer que cette métrique n'est induite par aucune norme dans $\mathbb{R}$ (*Vous pouvez vous servir du fait que la distance d entre deux nombres réels est bornée*).

Exercice 2 (Norme euclidienne).
Rappelons la "norme" euclidienne dans $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) :

$$\text{pour tout } x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \ , \quad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} \ .$$

Vérifier que c'est en effet une norme. (*Pour vérifier N3, vous pouvez vous servir sans preuve du* ***lemme de Schwartz*** *:*

$$\textit{pour tous } (a_1, \dots, a_p) \ , \quad (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p \ , \ \left| \sum_{i=1}^{p} a_i b_i \right| \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^{p} a_i^2} \ \sqrt{\sum_{i=1}^{p} b_i^2} \ . \ )$$

Exercice 3 (Exemples de normes).
1. Vérifiez que la fonction

$$\begin{array}{cccc} || \ || & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x, y) & \longmapsto & |x + y| + |x| \end{array}$$

définit une norme dans $\mathbb{R}^2$.

2. Dessiner la boule ouverte unité par rapport à cette norme.

3. Déterminez des conditions suffisantes que les constantes a, b, c, d doivent vérifier pour que la fonction

$$\begin{array}{rcccl} || \ || & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x, y) & \longmapsto & |ax + by| + |cx + dy| \end{array}$$

définisse une norme dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (Equivalence des normes).
Montrer que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, les trois normes $|| \ ||_1$, $|| \ ||_2$, $|| \ ||_\infty$ définies dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes.

Exercice 5 (Nature topologique de parties de l'espace normé $\mathbb{R}^p$).
Etablir si les ensembles suivants sont ouverts, fermés. Déterminer également les points intérieurs de ces ensembles ainsi que leur frontière. Dans chacun des exemples, faire un dessin représentant la région concernée.

Parties de $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0,\ 1 - \frac{1}{n}]$

Parties de $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$
$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{4n^2}\}$

Parties de $\mathbb{R}^3$: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 2\}$

Exercice 6 (Propriétés fondamentales des ouverts et des fermés).
Soit $(E, || \ ||)$ un espace normé. Alors les énoncés suivants sont vrais :

1. L'union d'une famille arbitraire d'ensembles ouverts est un ouvert. L'intersection d'un nombre <u>fini</u> d'ouverts est ouverte.
2. L'intersection d'une famille arbitraire d'ensembles fermés est fermée. L'union d'un nombre <u>fini</u> d'ensembles fermés est fermée.

Exercice 7 (Caractérisations topologiques).
Soient $(E, || \ ||)$ un espace normé et $A \subset E$. Vérifiez les énoncés suivants :

1. Un point x de E appartient à $\mathrm{Fr}(A)$ si et seulement tout voisinage de x rencontre A ou $E \setminus A$ en un point différent de x.
2. $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A)$.

Exercice 8 (Notion de voisinage).
Soit x un point de $\mathbb{R}^p$. On dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété *dans un voisinage de x* si cette propriété est satisfaite dans un ensemble ouvert contenant x. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont positives dans un voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 + x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont définies dans un voisinage de l'origine :

$$f(x, y) = \sqrt{x + y + 1}, \qquad f(x, y) = \ln\left(\sin(x^2 + 1)\right).$$