UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours et travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel

Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche 2

13 octobre 2009

Exercice 1 (Limites : exemples).
Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un point arbitraire. Calculer

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \ ,$$

pour les fonctions suivantes :

1. $$\begin{array}{rcll} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2} & \text{si } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcll} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Exercice 2 (Continuité : exemples).
1. A quels points de $\mathbb{R}^2$, les fonctions du premier exercice sont-elles continues ?

2. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que les fonctions suivantes sont continues à tout point de $\mathbb{R}^p$:

1. La somme dans $\mathbb{R}^p$
$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$
2. $(p = 1)$, le produit dans $\mathbb{R}$
$$\begin{array}{rcl} . : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

Exercice 3 (Limites et continuité, quelques énoncés de cours).
Montrez les énoncés suivants du cours :

1. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $D \subset \mathbb{R}^p$, g, f deux fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$ définies sur D et a un point adhérent à D. S'il existe deux points l_f et l_g dans $\mathbb{R}^q$ telles que
$$\lim_{x\to a} f(x) = l_f \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = l_g \ ,$$
alors
   (a) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = l_f + l_g$;
   (b) pour $q = 1$, $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = l_f.l_g$;
   (c) pour $q = 1$ et à condition qu'il existe un voisinage de l_g où $g(x) \neq 0$,
   $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = \lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = l_f/l_g$.

2. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $D \subset \mathbb{R}^p$, $f_1, \ldots, f_q$ des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement sur D_i $(1 \leq i \leq q)$, et $a \in D = D_1 \cap \ldots \cap D_q$. Alors toutes les fonctions $f_1, \ldots, f_q$ sont continues en a si et seulement si la fonction

$$\begin{array}{rcccl} f & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ & & x & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \end{array}$$

est continue en a.

Exercice 4 (Limites, question d'entraînement ; la réponse est disponible à la page `http ://math.univ-lyon1.fr/ altinel/Licence/licencegecmisyillar.html`**).**

Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites vers le point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(A) \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y); \quad (B) \lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x,y)); \quad (C) \lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x,y)).$$

On considère les applications suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Pour chaque fonction, déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel elle est bien définie, et montrer ensuite sur ces exemples que pour $(a, b) = (0, 0)$:

1. Deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième existe,
2. Une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres existent,
3. (B) et (C) peuvent exister sans être égales,
4. Si (A) et (B) existent alors elles sont égales.