UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours et travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel

Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche 3

20 octobre 2009

Exercice 1 (Limites à divers points de $\mathbb{R}^2$).
Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{x^2+y^2+2xy-1} \quad ;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}, \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y\ln(y-x^2)} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y \ .$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

où la fonction f est définie sur $\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y^2\ \}$ par la loi

$$(x,y) \ \mapsto\ \frac{x^2-y}{x-y^2}\ ,$$

pour les valeurs suivantes de (a,b) : $(1,1)$, $(0,0)$, $(1,-1)$.

(c)

$$\lim_{||(x,y)||\to+\infty} \frac{x\arctan y}{x^2+y^2+1} \quad ; \quad \lim_{||(x,y)||\to+\infty} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2} \quad ; \quad \lim_{||(x,y)||\to+\infty} (1+|x|+|y|)\sin(y^2)\ .$$

(*Le choix de la norme n'est pas précisé puisqu'elles sont toutes équivalentes sur* $\mathbb{R}^2$).

Exercice 2 (Limites suivant divers chemins).
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=0. \end{cases}$$

1. Etudier la limite quand $(x,y)\to(0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y=mx$ pour tout $m\in\mathbb{R}$,
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'équation $y=x^2$,
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 3 (Continuité).

1. Soient $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}^*,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma\ \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction

$$f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^\gamma} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue si et seulement si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \gamma$.

2. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{e^{x^2 y}-1}{xy} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ x & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases} \quad ; \qquad g \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \begin{cases} (x^2+3x+2)\sin(\pi/y) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 (Arcs : exemples simples de calcul).

(a) Soit

$$S = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||(x,y)||_\infty = 1\ \}\ .$$

Trouver une application continue γ de l'intervalle $[0,1]$ vers S telle que $\gamma(0) = (0,-1)$ et $\gamma(1) = (1,0)$.

(b) Soit

$$D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\ \} \cup \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 \leq 1\ \}\ .$$

Nous fixons deux points dans D, $P_0 = (x_0, y_0)$ et $P_1 = (x_1, y_1)$ tels que $y_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $y_2 \in \mathbb{R}_-^*$. Trouver une application continue γ de l'intervalle $[0,1]$ vers S telle que $\gamma(0) = P_0$ et $\gamma(1) = P_1$.

(c) Essayer de répéter le point (c) en remplaçant D par son intérieur. Quelle est votre conclusion ? Justifiez-la rigoureusement.