UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Cours et travaux dirigés:
Tuna Altınel

Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche 4

27 octobre 2009

Exercice 1 (Topologie).

1. Déterminer rigoureusement si les ensembles suivants sont compacts, connexes par arc :
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - 4)(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \leq 0\}$$
2. On pose $\mathcal{G} = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$, le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$. Soient $a < b$ deux nombres réels. Ecrire la définition d'un arc dans $\mathcal{G}$ qui joint le point (a, a^2) au point (b, b^2).
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On note l sa limite. Montrer que l'ensemble $\{u_n \mid n \in N\} \cup \{l\}$ est compact.

Exercice 2 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).
Soient f_1 et f_2 les fonctions définies par

$$f_1 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{x_1^4 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \sin(x_1 x_2) \end{array}$$

On définit alors

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \end{array}$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et expliciter sa matrice jacobienne à tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Exemples de fonctions de plusieurs variables).
Soient f et g les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array} \quad ; \quad g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sin(|xy|) \end{array}$$

1. Tracer les lignes de niveau
$$\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\ \}\ ,\ \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\ \}\ , \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 1\ \}\ .$$
2. Etudier la continuité de ces fonctions en $(0, 0)$. Déterminer leurs dérivées partielles premières.
3. Vérifier si ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.