Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche 5

3 novembre 2009

Exercice 1 (Dérivées partielles non continues).
Un des objectifs de cet exercice est d'illustrer que la condition d'être $\mathcal{C}^1$ est plus forte que celle d'être différentiable. En d'autres termes, il existe des fonctions différentiables sur un voisinage sans y être de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
2. Montrer que les dérivées partielles de f sont définies partout sur $\mathbb{R}^2$ mais qu'elles ne sont pas continues à l'origine.
3. Montrer que f est différentiable à tout point de $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2 (Coordonnées sphériques).
Soit S la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} S & : & \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times]0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} \\ & & (\ \rho\ ,\ \phi\ ,\ \theta\ ) & \longmapsto & (\ \rho\sin(\phi)\cos(\theta)\ ,\ \rho\sin(\phi)\sin(\theta)\ ,\ \rho\cos(\phi)\ ) \end{array}$$

1. Déterminer les images directes des régions suivantes sous l'action de S :
$\mathbb{R}_+^* \times \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times \{\pi\}$, $\{(\rho,\phi,\theta) | \frac{-\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\}$, $\{(\rho,\phi,\theta) | 0 \leq \theta \leq \pi\}$,
$\{(\rho,\phi,\theta) | \rho > 2\} \cap \{(\rho,\phi,\theta) | \frac{-\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\} \cap \{(\rho,\phi,\theta) | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\}$
2. Montrer que S est différentiable sur U.
3. Calculer le déterminant de la matrice jacobienne de S à un point arbitraire (ρ,ϕ,θ) de U. Vérifier qu'il est toujours non nul.
4. La fonction S est-elle injective sur U ?

Exercice 3 (Dérivées directionnelles).
Soient f la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue à tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
3. Montrer en les déterminant explicitement que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$.
4. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4 (Topologie).

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}^p$. Démontrer tout ensemble E tel que $B(x, r) \subset E \subset \overline{B}(x, r)$ est convexe.
2. Vérifier si les deux ensembles suivants sont convexes :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - 4)(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \leq 0\}$$