UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours et travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel

Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche 6

1er décembre 2009

Exercice 1 (Formule de Taylor).
Vérifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leurs domaines de définition, ensuite déterminer leurs formules de Taylor aux voisinages des points données :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \arctan\left(\frac{1+x}{1-y}\right) \end{array} \quad ; \quad \text{en } (0,0)$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & e^x \sin(x+y) \end{array} \quad ; \quad \text{en } (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y \end{array} \quad . \quad \text{en } (1,0)$$

Exercice 2 (Extréma locaux).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extréma locaux de la fonction f.
2. La fonction f possède-t-elle des extréma globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter le segment de droite L défini par
$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0,\ y = x+1\}$$
et déterminer les extréma globaux de la restriction de f à L en précisant en quels points de L ils sont atteints.

Exercice 3 (Extréma sur un compact).
Déterminer la borne supérieure de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x,y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$
sur le compact $K = [-1,1] \times [-1,1]$.

Exercice 4 (Extréma globaux).
On considère la fonction définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1. Etudier les extréma relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. On pourra utiliser les symétries de la fonction f pour réduire le nombre de cas à étudier.
2. Démontrer que $f(x,y) \to 0$ quand $\|(x,y)\| \to \infty$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence des extréma globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Exercice 5 (Multiplicateurs de Lagrange).
Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = e^{(x^2+y^2-4)^2}$.

1. Déterminer les points critiques de la fonction h ainsi que la nature de ces points.

2. On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par la relation

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\} .$$

Montrer que le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 est inclus dans D, puis déterminer les extrema de h sur le domaine D.