UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours et travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel

Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche 7

8 décembre 2009

Exercice 1 (Etude d'une ligne de niveau).
Nous considérons la fonction

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 \end{array}.$$

L'objectif de cet exercice est de comprendre la ligne de niveau $L_0(f)$ à partir d'une application du théorème des fonctions implicites.

1. Déterminer les dérivées partielles de f par rapport aux deux variables.
2. Montrer que les points sur $L_0(f)$ dont la première coordonnée est 1 sont $(1,1)$ et $(1,0)$.
3. Montrer qu'à chacun de ces deux points le TFI s'applique et permet d'exprimer chacune des deux coordonnées en fonction de l'autre.
4. Préciser la position de $L_0(f)$ par rapport aux tangentes aux points $(1,1)$ et $(1,0)$ et déterminer les pentes de ces deux droites.
5. Quels sont les points où $L_0(f)$ intersecte l'axe des x et l'axe des y ?
6. Caractériser les points où la deuxième coordonnée ne peut <u>pas</u> s'écrire en fonction de la première en appliquant le théorème des fonctions implicites. Combien en trouvez-vous ?
7. Répéter le point précédent en échangeant les roles des coordonnées.
8. En considérant l'équation $f(x,y) = 0$ comme une équation du second degré où y est la variable, essayer de deviner le comportement de $L_0(f)$ quand x tend vers $-\infty$.

Exercice 2 (Etude d'une ligne de niveau).
Cette fois-ci nous étudions une ligne de niveau sans pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites. Voici la fonction qui nous intéresse :

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & x^3 + y^3 - (x^2+y^2) + (x+y)(xy-1) + 1 \end{array}$$

1. Montrer que les points $(1,0)$ et $(0,1)$ sont deux points sur $L_0(f)$ où le TFI ne s'applique pas.
2. Factoriser l'expression $x^3 + y^3 - (x^2+y^2) + (x+y)(xy-1) + 1$ et dessiner sur le plan cartésien $L_0(f)$.
3. En utilisant le point précédent, vérifier qu'en tous les autres points de $L_0(f)$ le TFI s'applique. Essayer d'expliciter les possibilités.

Exercice 3 (Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^2$).
Voici deux courbes paramétrées, l'une simple, l'autre moins simple :

(A) le cercle unité

$$\begin{array}{rccl} C & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \ ; \end{array}$$

(B) la spirale logarithmique

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t) \ . \end{array} \qquad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

Répondre aux questions suivantes en définissant $x(t)$ et $y(t)$ comme les coordonnées respectives en temps t.

1. Calculer les valeurs de t pour lesquelles $x(t) = 0$. Résoudre la même question pour y.
2. Déterminer la pente de la tangente aux valeurs de t trouvées dans le point précédent.
3. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente s'annule.
4. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente n'est pas définie.
5. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0,0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
6. Montrer que la tangente à la spirale logarithmique en tout point de celle-ci fait un angle constant avec la droite joignant ce point à l'origine.

Exercice 4 (Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$: illustrations simples).
1. Déterminer la droite tangente et le plan normal à la courbe paramétrée suivante en $(0, 1, 2)$:

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \longmapsto & (\mathrm{sh}(t), \mathrm{ch}(t), 1 + e^t) \ . \end{array}$$

2. Voici une fonction que nous connaissons bien :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{G}(f)$ au point $(1, 1, 2)$.