UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours et travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel

Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche 8

15 décembre 2009

Exercice 1 (Calculs en utilisant le théorème de Fubini).
Calculer les intégrales suivantes :

$$\iint_D (x-y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ ,\ D \text{ est limité par les courbes }\ x=0\ ,\ y=x+2\ ,\ y=-x\ ,$$

$$\iint_D x\cos(y)\ \ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le x\le\sin(y)\ ,\ 0\le y\le\pi/2\}\ ,$$

$$\iint_D xy\ \ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le x^2+y^2\le 1\ ,\ x+\sqrt{3}y\le 1\}\ ,$$

$$\iiint_D x^2y\ \ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}z\ ,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ 0\le y\le 1-x^2\ ,\ |x+y+z|\le 1\}\ .$$

Exercice 2 (Changement de variables).

1. Calculer l'aire de la région dans $\mathbb{R}^2$ limitée par les courbes d'équation
$$y=ax\ ,\ y=x/a\ ,\ y=b/x\ ,y=1/bx\ ,\ \text{où}\ \ a>1\ ,\ b>1\ .$$
2. Calculer l'intégrale
$$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ ,$$
où D est l'intérieur de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1, et extérieur au cône de révolution autour de l'axe des z (troisième coordonnée) et d'angle $\pi/3$.
3. Calculer le volume du domaine D défini par l'intersection d'une sphère de rayon $R>0$ et d'un cylindre de révolution de rayon $R'>0$, avec $R'<R$, ayant pour axe un diamètre de la sphère.

Exercice 3 (Là où Fubini ne s'applique pas).
Montrer que les intégrales suivantes ne sont pas égales :

$$\int_0^1\Big[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}x\Big]\ \mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad \int_0^1\Big[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y\Big]\ \mathrm{d}x\ ,$$

et expliquer pourquoi le théorème de Fubini n'est pas applicable.

<u>Indication</u> : On commencera par calculer les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\arctan(x)\big)\ .$$