UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours et travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel

Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche 9

22 décembre 2009-7 janvier 2010

Exercice 1 (Exemples d'intégrales curvilignes).
Calculer les intégrales curvilignes dans les cas suivants, en parcourant les chemins dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :

1. $f(x,y) = x^2 + y^3$ et γ est la frontière du triangle de sommets $(0,0),(1,0)$ et $(0,1)$,
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ et γ est le cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 2.
3. $f(x,y) = xy$ et γ est le quart d'ellipse d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ situé dans le quart de plan $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 2 (Courbes paramétrées : retour à la spirale logarithmique).
Nous reprenons la spirale logarithmique de la fiche 7 pour l'étudier avec plus de détails grâce aux nouvelles connaissances.

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t)\ . \end{array} \qquad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

Répondre aux questions suivantes en définissant $x(t)$ et $y(t)$ comme les coordonnées respectives en temps t.

1. Calculer les valeurs de t pour lesquelles $x(t) = 0$. Résoudre la même question pour y.
2. Déterminer la pente de la tangente aux valeurs de t trouvées dans le point précédent.
3. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente s'annule.
4. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente n'est pas définie.
5. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
6. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0,0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
7. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.
8. Montrer que la tangente à la spirale logarithmique en tout point de celle-ci fait un angle constant avec la droite joignant ce point à l'origine.

Exercice 3 (Formes exactes, détermination de primitives).
Vérifier si les formes suivantes sont exactes dans lequel cas déterminer les primitives. Justifier l'utilisation du théorème de Poincaré.

1. $\omega(x,y) = ydx + xdy$;
2. $\omega(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2 - 2y)dy$;
3. $\omega(x,y) = \cos(x)dx + \sin(y)dy$;
4. $\omega(x,y) = (y + \frac{1}{x})dx + (x + \frac{1}{y})dy$;
5. $\omega(x,y) = (x+y)dx + (x-y)dy$.

Exercice 4 (Formes exactes, détermination de primitives).
Trouver une fonction non nulle $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la forme différentielle

$$\omega \;=\; \phi(x)(x+y+1)ydx \;+\; \phi(x)(2y+x)dy$$

soit exacte sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer ensuite toutes ses primitives.

Exercice 5 (Intégration des formes différentielles).
Calculer les intégrales suivantes :

1. $$\int_\gamma xdx \;+\; xydy \;,$$
   où γ est le quart de cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 joignant $(1,0)$ à $(0,1)$;
2. $$\int_\gamma \frac{x-y}{x^2+y^2}dx \;+\; \frac{x+y}{x^2+y^2}dy \;,$$
   où γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R parcouru dans le sens positif ;
3. $$\int_\gamma (y-z)dx \;+\; (z-x)dy \;+\; (x-y)dz \;,$$
   où γ est l'arc de l'hélice circulaire paramétrée par $(r\cos(t), r\sin(t), ht)$, avec $r, h \in \mathbb{R}_+^*$ fixés et $t \in [0, 2\pi]$.

Quelles conclusions pourrait-on tirer sur l'exactitude des formes ci-dessus ?

Exercice 6 (Green-Riemann).
Soit $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^2$ un arc de courbe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous supposerons qu'elle soit *fermée*, en d'autres termes $\gamma(a) = \gamma(b)$, et *non intersectante*, pour $t_1, t_2 \in [a,b]$, $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ si et seulement si $t_1 = t_2$. Par hypothèse, γ limite un ouvert D qui est symétrique par rapport à $(0,0)$: $(x,y) \in D$ si et seulement si $(-x,-y) \in D$. Démontrer que

$$\int_\gamma (\cos(xy) + x^3y + e^y)dx \;+\; (xe^y + xy^3)dy \;=\; 0 \;.$$

Exercice 7 (Green-Riemann).
Calculer $\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, avec pour $(x,y) \neq (1,0)$,

$$P(x,y) \;=\; \frac{-y}{(x-1)^2+y^2} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{x(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2} \;,$$

et pour γ une courbe fermée et non intersectante, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}^2$, orientée positivement et ne passant pas par $(1,0)$. Discuter les différents cas possibles.

Exercice 8 (Green-Riemann).
Soit l'ensemble
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\} .$$

1. Dessiner soigneusement D.
2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale
$$I = \iint_D (x - y)\, dxdy$$
   (a) en utilisant le changement de variables : $\begin{cases} x = 2r\cos(\theta) \\ y = 3r\sin(\theta) \ ; \end{cases}$
   (b) en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 9 (Courbes paramétrées, calcul d'aire).
Une *cycloïde* est définie par la courbe paramétrée suivante :
$$\begin{array}{rcll} \gamma \ : \ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \\ t & \longmapsto & \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} & (t \in \mathbb{R}\ ,\ a \text{ est une constante réelle strictement positive})\ . \end{array}$$

1. Représenter soigneusement une arche de la cycloïde ($t \in [0, 2\pi]$).
2. Déterminer l'aire de la région limitée par une arche de la cycloïde et l'axe des x.

Exercice 10 (Entraînement).
Déterminer l'aire limitée par la *lemniscate de Bernoulli* sur le plan cartésien. La formule en coordonnées polaires est
$$r = \sqrt{2\cos(2t)}\ .$$
Pour faciliter la compréhension et le calcul, commencer par dessiner soigneusement la lemniscate sur le plan cartésien.