Caractérisation topologique de la continuité

Dans cette note, nous vérifierons une caractérisation topologique de la notion de continuité. Nous l'appelons ainsi parce que les énoncés (2) et (3) ci-dessous n'évoquent aucune norme.

Théorème : *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une application. Les énoncés' suivants sont équivalents :*

1. *f est continue ;*
2. *si $V \subset \mathbb{R}^q$ est un ouvert, alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$*
   (rappel : $f^{-1}(V) = \{a \in \mathbb{R}^p | f(a) \in V\}$) ;
3. *si $F \subset \mathbb{R}^q$ est un fermé, alors $f^{-1}(F)$ est fermé de $\mathbb{R}^p$.*

Preuve : Montrons d'abord l'équivalence des deux premiers points. Supposons d'abord que f soit continue, et fixons une ouvert V de $\mathbb{R}^q$. Soit $a \in f^{-1}(V)$. Notre objectif est de trouver une boule ouverte de centre a qui soit contenue dans $f^{-1}(V)$. Pour ce faire, nos ressources sont l'ensemble $f^{-1}(V)$, qui est par hypothèse ouvert, et la continuité de la fonction f.

Puisque $a \in f^{-1}(V)$, $f(a) \in V$. L'ensemble V étant ouvert, il existe une boule ouverte de centre $f(a)$ qui est contenue dans V. Appelons ϵ le rayon de cette boule. Comme la boule est ouverte et non vide, ϵ est un réel strictement positif. Comme f est continue, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\text{si } ||x - a|| < \delta \text{ alors } ||f(x) - a|| < \epsilon \ .$$

En d'autres termes,

$$f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon) \ .$$

Or, nous avons supposé $B(f(a), \epsilon) \subset V$. Par conséquent, $f(B(a, \delta)) \subset V$, soit encore $B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Nous avons donc trouvé une boule de centre a qui est contenu dans $f^{-1}(V)$.

Maintenant nous admettrons comme hypothèse l'énoncé (2), et nous en déduirons la continuité de f en un point a arbitrairement choisi dans le domaine de f. Fixons donc un point $a \in \mathbb{R}^p$ dans le domaine de f. Son image dans $\mathbb{R}^q$ est $f(a)$.

Fixons $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il nous faut montrer l'existence d'un réel strictement positif δ tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^p,\ ||x - a|| < \delta \text{ implique } ||f(x) - f(a)|| < \epsilon \ .$$

Une manière équivalente d'exprimer cette condition est

$$f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon) \ ,$$

soit encore

$$B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) \quad .$$

Maintenant, nous appliquerons l'hypothèse de l'énoncé (2) à la boule ouverte $B(f(a), \epsilon)$. Celle-ci étant un ensemble ouvert, son image inverse $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Par conséquent, $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ contient une boule ouverte de centre a et de rayon δ pour un certain $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $||x - a|| < \delta$ implique $||f(x) - f(a)|| < \epsilon$. Nous avons donc vérifé que f est une fonction continue en un point arbitrairement choisi de son domaine, en d'autres termes elle est continue sur son domaine.

Ensuite, nous montrons l'équivalence des énoncés (1) et (3), en utilisant l'équivalence que nous venons de vérifier. Le raisonnement est très formel, il se base sur la définition d'un fermé comme complémentaire d'un ouvert. Soit donc F un fermé de $\mathbb{R}^q$. Par définition d'un fermé, F est fermé si et seulement si son complémentaire $\mathbb{R}^q \setminus F$ est ouvert. D'après l'équivalence des énoncés (1) et (2), cette dernière condition est équivalente à dire que $f^{-1}(\mathbb{R}^q \setminus F)$ est ouvert. Or, $f^{-1}(\mathbb{R}^q \setminus F) = f^{-1}(\mathbb{R}^q) \setminus f^{-1}(F)$ Alors, $f^{-1}(\mathbb{R}^q) \setminus f^{-1}(F)$ est ouvert par définition des fermés encore une fois. De manière équivalente, $f^{-1}(F)$ est fermé.

Pour finir, nous avons montré d'abord l'équivalence des énoncés (1) et (2), et puis celle des énoncés (1) et (3). Ainsi, tous les trois énoncés sont équivalents. $\square$