Norme subordonnée

L'ensemble des applications linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ arbitrairement fixés, muni de l'addition usuelle des fonctions

$$u \ + \ v \ : \ x \ \longmapsto \ u(x) + v(x) \ \text{ pour toutes } u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$$

et de la multiplication usuelle par les réels

$$\lambda u \ : \ x \ \longmapsto \ \lambda \, u(x) \ \text{ pour toute fonction } u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \text{ et tout scalaire } \lambda \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel. Il est temps de le vérifier si vous avez des doutes.

Dans cette note, nous vérifierons la conclusion suivante qui décrit une méthode pour transformer $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ en un espace normé :

Enoncé : *Soient* $\| \ \|_{\mathbb{R}^p}$ *et* $\| \ \|_{\mathbb{R}^q}$ *deux normes définies sur* $\mathbb{R}^p$ *et* $\mathbb{R}^q$ *respectivement. L'application*

$$\begin{array}{rcccl} || \ || & : & \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & u & \longmapsto & |||u||| \ = \ \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_{\mathbb{R}^p}}{\|x\|_{\mathbb{R}^q}} \end{array}$$

définit une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

Il faudra d'abord vérifier que la définition de la fonction $||| \ |||$ a un sens. En effet, il n'est pas clair a priori si la borne supérieure de l'énoncé existe. Cette vérification utilise le lemme suivant :

Lemme : *Pour tout* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, *une constante* $M \in \mathbb{R}_+$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq M \|x\|_{\mathbb{R}^p} \quad .$$

Preuve du lemme : La preuve utilisera l'équivalence des normes dans l'espace normé $\mathbb{R}^p$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ d'écriture $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$ par rapport à la base canonique $(e_1, \ldots, e_p)$, la suite suivante d'(in)égalités est vraie :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_{\mathbb{R}^q} \ = \ \|u(\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i)\|_{\mathbb{R}^q} \ &= \ \| \sum_{i=1}^p \lambda_i u(e_i)\|_{\mathbb{R}^q} \ \leq \ \sum_{i=1}^p \|\lambda_i u(e_i)\|_{\mathbb{R}^q} \\ &= \ \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \|u(e_i)\|_{\mathbb{R}^q} \ \leq \ \max \|u(e_i)\|_{\mathbb{R}^q} \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \\ &= \ \max \|u(e_i)\|_{\mathbb{R}^q} \|x\|_1 \end{aligned}$$

où $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^p |x_i|$. Comme toutes les normes définies sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|x\|_1 \leq \|x\|_{\mathbb{R}^p}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. Par conséquent, on conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q} \ \leq \ \max \|u(e_i)\|_{\mathbb{R}^q} \ \alpha \|x\|_{\mathbb{R}^p} \ .$$

Ainsi, il suffit de poser $M = \alpha \ \max \|u(e_i)\|_{\mathbb{R}^q}$. □

De ce lemme, on déduit le corollaire suivant qui en particulier montre que la borne supérieure de l'énoncé ci-dessus existe :

Corollaire : *Si* M *est une constante telle que celle déterminée dans le lemme, alors*

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} \ = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^p} = 1} \|u(x)\|_{\mathbb{R}^q} \ \leq M \ .$$

Preuve du corollaire : En effet, pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^p$, la linéarité de u permet de conclure les égalités suivantes :

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} = \sup_{x\neq 0} \left\| \frac{u(x)}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} \right\|_{\mathbb{R}^q} = \sup_{x\neq 0} \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} \right) \right\|_{\mathbb{R}^q} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^p}=1} \|u(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq M \ .$$

La borne supérieure recherchée pour définir $|||\ |||$ dans l'énoncé est la borne inférieure des majorants M. $\square$

Il ne reste qu'à vérifier que la fonction $|||\ |||$ satisfait les conditions pour être une norme :

Preuve de l'énoncé : Nous vérifierons que les conditions (N1), (N2) et (N3) sont satisfaites.

(N1) Supposons $|||u||| = 0$. Ceci équivaut à dire que $\frac{\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. Comme $\|\ \|_{\mathbb{R}^p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^p$, pour tout $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, la valeur $\|x\|_{\mathbb{R}^p} \neq 0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q} = 0$. Comme $\|\ \|_{\mathbb{R}^q}$ est une norme sur $\mathbb{R}^q$, on conclut alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $u(x) = 0$. Ainsi, u est l'application nulle.

(N2) Il suffit de constater que

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|(\lambda u)(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda\ u(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda|\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} = |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} \ .$$

(N3) Si $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, alors

$$\begin{aligned}
|||u+v||| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|(u+v)(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} \\
&= \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)+v(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} \\
&\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q} + \|v(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} \\
&= \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|v(x)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x\|_{\mathbb{R}^p}} \\
&= |||u||| + |||v||| \ .
\end{aligned}$$

$\square$