UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés

Math IV, Analyse – Fiche 13

6 janvier 2011

Exercice 1 (Intégration des formes différentielles).
Calculer les intégrales suivantes :

1. $$\int_\gamma xdx \ + \ xydy \ ,$$
   où γ est le quart de cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 joignant $(1,0)$ à $(0,1)$;
2. $$\int_\gamma (y-z)dx \ + \ (z-x)dy \ + \ (x-y)dz \ ,$$
   où γ est l'arc de l'hélice circulaire paramétrée par $(r\cos(t), r\sin(t), ht)$, avec $r, h \in \mathbb{R}_+^*$ fixés et $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 2 (Une forme fermée mais non exacte).
On définit
$$\omega(x,y) \ = \ \frac{-y}{x^2+y^2}dx \ + \ \frac{x}{x^2+y^2}dy \ .$$

1. Vérifier que ω est une forme fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Déterminer $\int_\gamma \omega$ où γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R parcouru dans le sens positif.
3. Déduire que ω n'est pas une forme exacte.

Exercice 3 (Green-Riemann).
Soit $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$ un arc de courbe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous supposerons qu'elle soit *fermée*, en d'autres termes $\gamma(a) = \gamma(b)$, et *non intersectante*, pour $t_1, t_2 \in [a, b]$, $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ si et seulement si $t_1 = t_2$. Nous supposerons aussi que γ limite un ouvert D qui est symétrique par rapport à $(0, 0)$: $(x, y) \in D$ si et seulement si $(-x, -y) \in D$. Démontrer que

$$\int_\gamma (\cos(xy) + x^3 y + e^y)dx \ + \ (xe^y + xy^3)dy \ = \ 0 \ .$$

Cet exercice n'était pas abordé en travaux dirigés, voici un corrigé rédigé en collaboration avec mon collègue Serge Richard :

On définit $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $P(x, y) = \cos(xy) + x^3 y + e^y$ et $Q(x, y) = xe^y + xy^3$. Ces deux applications étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on peut appliquer le théorème de Green-Riemann pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma P(x, y)\ \mathrm{d}x + Q(x, y)\ \mathrm{d}y \quad &= \quad \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\Big)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \quad \iint_D (y^3 - x^3 + x\sin(xy))\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ .
\end{aligned}$$

On pose ensuite $I = \iint_D (y^3 - x^3 + x\sin(xy))\ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y$. En effectuant le changement de variables $u = -x$ et $v = -y$, de jacobien égal à 1, et en utilisant la symétrie de D pour remarquer que le domaine d'intégration demeure inchangé dans les nouvelles variables, on obtient :

$$\begin{aligned}
I \quad &= \quad \iint_D ((-v)^3 - (-u)^3 - u\sin(uv))\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\
&= \quad -\iint_D (v^3 - u^3 + u\sin(uv))\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\
&= \quad -I\ ,
\end{aligned}$$

car le nom de la variable d'intégration n'a pas d'importance. On a ainsi obtenu que $I = -I$, ce qui ne peut être vrai que si $I = 0$.

Exercice 4 (Green-Riemann).
Soit l'ensemble

$$D = \left\{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \ \right\}\ .$$

Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \iint_D (x - y)\ dxdy$$

1. en utilisant le changement de variables : $\left\{ \begin{array}{l} x = 2r\cos(\theta) \\ y = 3r\sin(\theta)\ ; \end{array} \right.$
2. en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 5 (Green-Riemann, calcul d'aire).

1. Une *cycloïde* est définie par la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & a(t - \sin t) \\ y(t) & = & a(1 - \cos t) \end{array} \right. \end{array} \qquad (t \in \mathbb{R}\,,\ a \text{ est une constante réelle strictement positive})\,.$$

   (a) Représenter soigneusement une arche de la cycloïde ($t \in [0, 2\pi]$).

   (b) Déterminer l'aire de la région limitée par une arche de la cycloïde et l'axe des x.

2. Déterminer l'aire limitée par la *lemniscate de Bernoulli* sur le plan cartésien. La formule en coordonnées polaires est

$$r = \sqrt{2\cos(2t)}\ .$$

   Pour faciliter la compréhension et le calcul, commencer par dessiner soigneusement la lemniscate sur le plan cartésien.

Le deuxième point était abordé un peu trop rapidement, donc voici une réponse plus détaillée.

La lemniscate est formée de deux boucles symétriques par rapport à l'axe des y, donc d'aire égale. Nous avons constaté que l'aire de l'une de ces deux boucles est la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_\gamma -ydx \ + \ xdy\ ,$$

où γ est la courbe décrite par $r = \sqrt{2\cos(2t)}$ avec $t \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Comme r est une fonction de t, et les égalités suivantes s'ensuivent :

$$\begin{array}{rcl} (x, y) & = & (x(t), y(t)) \ = \ (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t)) \\ dx & = & r'(t)\cos(t) - r(t)\sin(t) \\ dy & = & r'(t)\sin(t) + r(t)\cos(t) \quad . \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}(-ydx \ + \ xdy) & = & \frac{1}{2}\ [\ -r(t)\sin(t)\ (r'(t)\cos(t) - r(t)\sin(t)) \\ & & +\ r(t)\cos(t)\ (r'(t)\sin(t) + r(t)\cos(t))\ ]\ dt \\ & = & \frac{1}{2}r(t)^2\ dt\ . \end{array}$$

On déduit que l'aire d'une boucle est

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2t) \ = \ 1.$$

Finalement, l'aire totale est 2.