Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE (L2) – Examen partiel

Mardi, 27 mars 2007
Durée : 1 heure 30 minutes
Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Déterminer l'intérieur, la frontière et l'adhérence des ensembles suivants (aucune justification n'est demandée). Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés, compacts, connexes par arc, en justifiant brièvement la réponse.

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,
$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}$,
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}$.

Exercice II. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{2x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = \alpha \end{cases}$$

(1) Calculer la limite de $f(x, y)$ en $(0, 0)$. Trouver la valeur de α pour laquelle la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
(2) Désormais soit $\alpha = 0$. Calculer la dérivée de f en $(0, 0)$ suivant le vecteur $\overrightarrow{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.
(3) Trouver les dérivées partielles de f en $(0, 0)$. Calculer le gradient $\overrightarrow{\text{grad}} f(0, 0)$.
(4) Vérifier si la formule liant la dérivée directionnelle et le gradient est vraie pour f en $(0, 0)$.
(5) Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Justifier la réponse.

Exercice III. On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$g(x, y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{1 - x^2 - y}\ .$$

(1) Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté C, sur lequel g est bien définie. Représenter graphiquement cet ensemble. On pourra s'inspirer de l'exercice 1 pour cette question.
(2) On note par Γ la frontière de C. Calculer

$$\min_{(x,y)\in\Gamma} g(x, y) \qquad \text{et} \qquad \max_{(x,y)\in\Gamma} g(x, y)\ ,$$

et déterminer en quels points (x, y) de Γ ces valeurs sont atteintes.
(3) Trouver les points critiques de g à l'intérieur de C, et déterminer la valeur de g en ces points.
(4) En déduire la valeur minimale et la valeur maximale de g sur C.
(5) Déterminer le développement de Taylor de g à l'ordre 1 au voisinage du point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Exercice IV. Question de cours. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un domaine $E \subset \mathbb{R}^2$. Montrer que le gradient de h au point $(a, b) \in E$ est orthogonal à la ligne de niveau $k = h(a, b)$:

$$L_k = \{(x, y) \in E \mid h(x, y) = k\}.$$