Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE (L2) – Examen final

Mardi, 5 juin 2007
Durée : 2 heures
Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Soient H une fonction réelle d'une variable réelle et $A(0,0)$ et $B(1,1)$ deux points dans le plan $\mathbb{R}^2$.

(1) Démontrer que l'intégrale curviligne
$$\int_A^B H(x^2+y^2)x\,\mathrm{d}x + H(x^2+y^2)y\,\mathrm{d}y$$
ne depend pas du choix de chemin reliant A et B.

(2) Calculer cette intégrale pour $H(u) = 2\cos u$.

Exercice II.

Soit l'ensemble
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

(1) Dessiner D.

(2) Soit C l'ensemble des points du bord de D. Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe C en un point $(x_0, y_0) \in C$, en supposant $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

(3) Calculer de deux façons différentes l'intégrale
$$I = \iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

(a) en utilisant le changement de variables : $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$;

(b) en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice III. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = x^3(a-x) - b^2y^2$, avec $a, b > 0$.

(1) Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

(2) Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $(a,0)$.

On considère maintenant la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ définie par la condition $f(x,y) = 0$.

(3) Représenter graphiquement Γ en déterminant les points de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels la tangente à la courbe est soit horizontale, soit verticale. On pourra éventuellement s'aider de la symétrie naturelle de la courbe Γ.

(4) Déterminer le plus grand ensemble de points de Γ pour lesquels le théorème des fonctions implicites s'applique.

(5) Vérifier que l'aire de la figure délimitée par Γ vaut $\frac{\pi a^3}{8b}$. On pourra éventuellement utiliser le changement de variable suivant: $x = \frac{a}{2}(1-\cos t)$ et effectuer l'intégration pour la variable x sur l'intervalle $[0,a]$.

Numero de feuille d'examen à reporter : ______________________________

Exercice IV. QCM. Attention : chaque question peut avoir plus d'une réponse correcte. Pour avoir le demi-point d'une question, il est impératif de trouver toutes les réponses correctes.

(1) La fonction f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

- (a) n'admet pas de limite en $(x,y) = (0,0)$; ☐
- (b) admet la limite 0 en $(0,0)$; ☐
- (c) admet la limite 1 en $(0,0)$. ☐

(2) La dérivée d'une fonction différentiable f de deux variables dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ est donnée par la formule

- (a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f(x,y) \cdot \vec{u}$; ☐
- (b) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t\vec{u}) - f(x,y)}{t}$; ☐
- (c) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t\vec{u})}{t}$. ☐

(3) Le plan normal à une courbe dans l'espace en un point

- (a) peut être tangent à une surface qui contient cette courbe; ☐
- (b) est donné par deux équations du type : $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$; ☐
- (c) est perpendiculaire au vecteur tangent à la courbe en ce point. ☐

(4) La fonction $f(x,y) = x^{2007} + y^{2007}$

- (a) possède un maximum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (b) possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (c) possède un maximum sur le carré $C = \{1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$. ☐

(5) La condition nécessaire pour qu'un champ de vecteurs

$$\vec{V} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

de $\mathbb{R}^3$ soit un champ de gradient est

- (a) $\mathrm{div}\ \vec{V} = 0$; ☐
- (b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{V} = 0$; ☐
- (c) $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x,\ \partial Q/\partial z = \partial R/\partial y$ et $\partial R/\partial x = \partial P/\partial z$. ☐

(6) Le changement de variables $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ a pour jacobien $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}$:

- (a) -1; ☐
- (b) 1; ☐
- (c) ρ; ☐
- (d) $\rho^2\cos\theta\sin\theta$. ☐

(7) Une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

- (a) est un champ de vecteurs; ☐
- (b) paramètre une courbe dans l'espace; ☐
- (c) peut paramétrer un plan dans l'espace. ☐

(8) Une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

(a)	est un champ de vecteurs;	☐
(b)	paramètre une courbe dans l'espace;	☐
(c)	peut paramétrer un plan dans l'espace.	☐

(9) Soit Δ le triangle défini par les trois droites : $x = 0,\ y = 1$ et $y = x$.

L'intégrale double $\displaystyle\iint_\Delta xe^{xy}$ est égale à

(a)	$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 xe^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y;$	☐
(b)	$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^y xe^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y;$	☐
(c)	$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 xe^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x;$	☐
(d)	$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x xe^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$	☐

(10) Soit $\overrightarrow{V} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$. Le rotationel de $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}$, est égal à

(a)	$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & yz & xz \end{vmatrix};$	☐
(b)	$-x - y - z;$	☐
(c)	$-(y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}).$	☐

(11) Soit $\overrightarrow{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. La divergence de $\overrightarrow{F}$, $\mathrm{div}\overrightarrow{F}$, est égale à

(a)	$0;$	☐
(b)	$3;$	☐
(c)	$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$	☐

(12) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$. Alors :

(a)	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)$ est toujours $\overrightarrow{0}$;	☐
(b)	$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)$ est toujours 0 ;	☐
(c)	$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$ est une application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$.	☐