Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE (L2) – Examen final. Deuxième session.

Lundi, 25 juin 2007

Durée : 1 heure 30 minutes

Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = (3x^2 y \sin y - 2x^2 \cos y,\ ax^3 y \cos y + bx^3 \sin y)$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Trouver a et b pour que $\overrightarrow{V}$ soit un champ de gradient.

(2) Soit C un arc de courbe quelconque d'extrêmités $(0,0)$ et $(0,1)$ avec une representation paramétrique $\gamma : t \to (x(t), y(t)),\ t \in [0,1],\ \gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (0,1)$. Pour a et b trouvés ci-dessus, démontrer que

$$\int_C \overrightarrow{V} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\gamma} = 0.$$

(3) Plus généralement, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ et C un arc de courbe comme dans (2). Exprimer l'intégrale

$$I = \int_C \overrightarrow{W} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\gamma}$$

comme une intégrale en t et la calculer en fonction des données (on remarquera que l'expression à intégrer est la dérivée d'une fonction facile à écrire).

Exercice II. On considère la fonction $h(x,y) = x^2 y + \ln(1 + y^2)$.

(1) Soit Γ la courbe dans $\mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y) = 0$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier que le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas au point $(0,0)$ de Γ.

(2) Pour $a \neq 0$, soit g_a la restriction de h à la droite d'équation $y = ax$. Montrer que g_a admet un minimum local à l'origine, et qu'il en est de même pour la restriction de h à l'axe (Oy).

(3) Étudier le signe de h au voisinage de l'origine. Montrer que h n'admet pas de minimum local à l'origine.

Exercice III. Soit $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

(1) Démontrer que la courbe α de $\mathbb{R}^3$ représentée paramétriquement par

$$(g(t),\ \sin t,\ \cos t),\ t \in [-\pi, \pi].$$

a la même longueur que la courbe plane représentée par l'équation $y = g(x), x \in [-\pi, \pi]$.

(2) Calculer la longueur de la courbe $\alpha(t) = (\sqrt{\pi^2 - t^2},\ \sin t,\ \cos t)$, pour $t \in [-\pi, \pi]$

Exercice IV. On considère la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ donnée par la représentation paramétrique $x(t) = \sin 2t$ et $y(t) = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$.

(1) Trouver les valeurs de t pour lesquelles $x(t) = 0$ et calculer les valeurs de $y(t)$ correspondantes. Trouver les valeurs de t pour lesquelles $y(t) = 0$ et calculer les valeurs de $x(t)$ correspondantes. Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la tangente à la courbe est soit horizontale, soit verticale. Marquer les valeurs maximales de x et de y sur les axes. Représenter graphiquement Γ.

(2) Écrire l'équation de la droite tangente à la courbe au point $t = \pi/3$.

Exercice V. Calculer l'intégrale

$$\iiint_D z \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z, \text{ avec } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$