UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 10

7 mai 2007

Exercice 1.
Calculer les intégrales suivantes :

$$\iint_D x\cos(y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le x\le \sin(y)\ ,\ 0\le y\le \pi/2\}\ ,$$

$$\iint_D xy\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le x^2+y^2\le 1\ ,\ x+\sqrt{3}y\le 1\}\ ,$$

$$\iiint_D x^2y\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ ,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ 0\le y\le 1-x^2\ ,\ |x+y+z|\le 1\}\ ,$$

$$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

où D est l'intérieur de la sphère de centre $(0,0,0)$ *et de rayon* 1, *et extérieur au cône de révolution d'axe Oz et d'angle* $\pi/3$.

Réponse :

$$\begin{aligned}\iint_D x\cos(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sin y} x\cos(y)\ \ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(y)\cos(y)}{2}\ \ \mathrm{d}y\\ &= \left[\frac{\sin^3(y)}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_D xy\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_0^{\sqrt{3}/2}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{3}y} xy\ \ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y\\ &\quad +\int_{-1}^{0}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy\ \ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Le premier terme est égal à $-\frac{3}{32}$, le deuxième donne une contribution nulle car l'intégration selon x (pour y fixé) est celle d'une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à l'origine.

$$
\begin{aligned}
\iiint_D x^2y \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{-1-x-y}^{1-x-y} x^2y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} x^2y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-1}^{1}\frac{x^2(1-x^2)^2}{2} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1}[x^2-2x^4+x^6] \, \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^5}{5}+\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{16}{105}
\end{aligned}
$$

Pour la dernière intégrale, l'approche la plus efficace est d'introduire les coordonnées sphériques. Nous adoptons le changement de coordonnées suivant qui n'est aucunement pas le seul utilisé dans les livres que vous allez éventuellement utiliser :

$$
\begin{cases}
x &= \rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\
y &= \rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\
z &= \rho\cos(\phi)
\end{cases}
$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi \in [0,\pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Il en découle que le déterminant de la matrice Jacobienne est $\rho^2\sin(\phi)$. En conséquence, dans notre cas particulier on obtient les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
\iiint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_0^1 \frac{\rho^2\sin^2(\phi)}{\rho^2}\rho^2\sin(\phi) \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{3}\sin^3(\phi) \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{3}(\sin(\phi)-\cos^2(\phi)\sin(\phi)) \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\mathrm{d}\theta \\
&\quad +\frac{1}{9}\int_0^{2\pi}\left(\cos^3\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{11\pi}{18}
\end{aligned}
$$

Exercice 2.
Calculer l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes d'équation

$$y = ax \ , \ y = x/a \ , \ y = b/x \ , y = 1/bx \ , \ \text{où} \ \ a > 1 \ , \ b > 1.$$

Réponse : On notera D le domaine dont on veut calculer la surface. Pour développer une bonne méthode de solution à cet exercice il est utile de constater que

$$\frac{1}{a} < \frac{y}{x} < a \quad , \quad \frac{1}{b} < yx < b \ .$$

Le changement de variables efficace en découle :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \frac{y}{x} \\ v & = & xy \end{array} \right.$$

Une certaine prudence est obligatoire car ce changement de variables n'est pas injectif, plus précisément l'application ϕ qui associe à chaque paire (x, y) la paire (u, v) n'est pas injectif sur son domaine de définition. Ca devient plus visible quand on essaye d'exprimer x et y en fonction de u et de v :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^2 & = & \frac{v}{u} \\ y^2 & = & uv \end{array} \right.$$

En effet, ϕ associe deux points symétriques par rapport à l'origine de D au même point dans le plan (u, v). Cette complication peut être apprivoisée en restreignant $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, \infty[$. Il suffira de doubler la valeur de l'intégrale que l'on aura calculée si l'on désire également considérer la partie de la figure dans le $3^{\text{ième}}$ quadrant.

Le paragraphe précédent nous permet d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y & = & \sqrt{uv} \end{array} \right.$$

Alors

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \left(\begin{array}{cc} \frac{-\sqrt{v}}{2u^{3/2}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{array} \right)$$

La valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne est alors $\frac{1}{2u}$. La valeur de l'aire est alors, si l'on considère les deux parties mentionnées ci-dessus, le double de la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{\frac{1}{b}}^{b} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{2u} \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v$$

Celle-ci vaut $\left(b - \frac{1}{b}\right) \ln(\mathrm{a})$. Donc l'aire totale de D est $2\left(b - \frac{1}{b}\right) \ln(\mathrm{a})$.

Exercice 3.
Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \ \mathrm{d}x \ .$$

Réponse : Nous nous contentons de remarquer que si on appelle I l'intégrale à calculer, alors

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} \ \mathrm{d}x \ \int_0^\infty e^{-y^2} \ \mathrm{d}y \ .$$

Un passage en coordonnées polaires permet de conclure facilement.

Exercice 4.
Calculer l'intégrale

$$\iint_C (x+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

sur le domaine C *contenant l'origine et délimité par le cercle de centre* $(0,0)$ *et de rayon* $\sqrt{5}$*, et la droite d'équation* $x+y+3=0$.

Réponse : On peut envisager plusieurs démarches pour cette question ; nous en donnons deux. La première, plus compliquée, met en relief certaines de vos connaissances acquises en algèbre linéaire tandis que la deuxième simple et élémentaire utilise certaines symétries de l'application

$$(x,y) \to x+y.$$

Commençons par la première réponse. Le domaine C d'intégration peut être transformé en un domaine C' en posant

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \qquad (1)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \qquad (2)$$

Ce changement de variables s'explique plus conceptuellement avec vos connaissances en algèbre linéaire. On transforme l'axe des x en la droite $y=-x$ et l'axe des y en la droite $y=x$. En d'autres termes, on tourne les deux axes par $-\frac{\pi}{4}$. L'image de la base canonique (e_1,e_2) est (f_1,f_2), qui s'écrit en fonction de (e_1,e_2) de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lllll} f_1 & = & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)e_1 & + & \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)e_2 \\ f_2 & = & \cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)e_1 & + & \sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)e_2 \end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{lllll} f_1 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_1 & - & \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_2 \\ f_2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_1 & + & \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_2 \end{array}\right.$$

Si on représente en colonnes les expressions pour f_1 et f_2 respectivement, on obtient la matrice de passage qui transforme tout vecteur (u,v) par rapport à la base (f_1,f_2) (en d'autres termes uf_1+vf_2) en un vecteur (x,y) par rapport à la base (e_1,e_2) (xe_1+ye_2) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Le passage inverse

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donne les changements (1) et (2) ci-dessus.

Maintenant nous revenons à notre intégration. On remplace x et y par u et v en utilisant le changement de variables. L'intégrale se met sous forme

$$\begin{aligned}
2\int_{\frac{-3}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\int_0^{\sqrt{5-v^2}} v\sqrt{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= 2\int_{\frac{-3}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{2}\,[vu]_0^{\sqrt{5-v^2}}\,\mathrm{d}v \\
&= 2\int_{\frac{-3}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{2}\ \ v\sqrt{5-v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= 2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{3}\left(5-v^2\right)^{3/2}\right]_{\frac{-3}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

La deuxième méthode est plus directe. Elle utilise un raisonnement général dont vous rencontrerez une autre application dans la fiche 11. L'application définie par la loi $f(x,y)=x+y$ a la propriété $f(-x,-y)=-f(x,y)$. En plus, un disque centré à l'origine est symétrique par rapport à $(0,0)$, en d'autres termes (x,y) est dans le disque si et seulement si $(-x,-y)$ y est aussi. Or, sur tout domaine D comportant cette symétrie, une application f ayant la propriété susmentionnée aura l'intégrale (si intégrale il y a) égale à 0. En effet, un changement de variable en posant $X=-x$ et $Y=-y$ montre que

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D f(-X,-Y)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y \\
&= -\iint_D f(X,Y)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y
\end{aligned}$$

En conséquence on peut évaluer l'intégrale en question sur le domaine délimité par la droite et le cercle donnés et ne contenant pas l'origine. L'intégrale à calculer est alors

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1}\int_{\sqrt{5-y^2}}^{-y-3}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-2}^{-1}\int_{\sqrt{5-y^2}}^{-y-3}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{-1}\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{\sqrt{5-y^2}}^{-y-3}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{-1}\left(2+y\sqrt{5-y^2}\right)\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale que nous cherchons est donc l'opposé de ce que nous venons de calculer, ce qui est cohérent en particulier avec la première méthode.