UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 1

19 & 20 février 2007

Exercice 1 (Normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$).
On considère les trois applications de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définies pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|, \qquad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

1. Vérifier que ces applications définissent des normes.
   Indication : Pour $\|\cdot\|_2$, en vérifiant l'inégalité triangulaire, vous pouvez utiliser sans preuve le *lemme de Schwartz*, à savoir : *Si* $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, *alors*
   $$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$
2. Dessiner la boule unité B_j dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_j$ pour $j \in \{2, \infty, 1\}$, et montrer que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 2 (Ouvert / fermé).
Etablir si les ensembles suivants sont ouverts et/ou fermés (ou bien ni ouverts ni fermés). Dans chacun des exemples, faire un dessin représentant la région concernée.

un singleton dans $\mathbb{R}$,	une partie finie de $\mathbb{R}$,
$\mathbb{N}$,	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$,
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 2\}$,	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$,
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$,	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|x\| < \|y\| < 1\}$.

Exercice 3 (Notion de voisinage).
Soit x un point de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété *dans un voisinage de x* si cette propriété est satisfaite au moins dans un ensemble ouvert contenant x.

Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont positives dans un voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 + x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont définies dans un voisinage de l'origine :

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}, \qquad f(x, y) = \ln\left(\cos(x^2 + y^2)\right).$$

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la limite pour $(x, y) \to (0, 0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$ pour tout $m \in \mathbb{R}$,
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'equation $y = x^2$,
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 5.
Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites :

$$(A) \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y); \quad (B) \lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x, y)); \quad (C) \lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x, y)).$$

On considère les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x, y) = \frac{\sin x}{y}.$$

Montrer que sur ces exemples,

1. Deux de ces trois limites en $(0, 0)$ peuvent exister sans que la troisième existe,
2. Une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres existent,
3. (B) et (C) peuvent exister sans être égales,
4. Si (A) et (B) existent alors elles sont égales.