UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 11

14 & 15 mai 2007

Exercice 1.
Un *cycloïde* est défini par la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t), \qquad t \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

1) Représenter aussi précisément que possible une arche du cycloïde ($t \in [0, 2\pi]$).

2) Déterminer l'aire de la surface délimitée par une arche du cycloïde et l'axe des x.

Exercice 2.
Soit Γ une courbe fermée et non intersectante dans $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 dont le domaine intérieur D est symétrique par rapport à $(0,0)$, c'est-à-dire $(x,y) \in D$ si et seulement si $(-x,-y) \in D$. Démontrer que

$$\int_\Gamma (\cos(xy) + x^3 y + e^y)\,\mathrm{d}x + (xe^y + xy^3)\,\mathrm{d}y = 0 \ .$$

Exercice 3.
Calculer $\int_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, avec pour $(x,y) \neq (1,0)$,

$$P(x,y) = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{x(x-1) + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \ ,$$

et pour Γ une courbe fermée et non intersectante de $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 par morceaux, orientée positivement et ne passant pas par $(1,0)$. Discuter les différents cas possibles.

Exercice 4 (Folium de Descartes).
On considère le folium de Descartes d'équation : $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$, avec $a > 0$.

1. Représenter aussi précisément que possible le folium de Descartes. Pour vous guider, répondez aux questions suivantes :
   a) Calculer les points de la courbe pour lesquels $x = y$,
   b) Déterminer les dérivées partielles de f,
   c) Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la pente de la tangente à la courbe s'annule.
   d) Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquelles la pente de la tangente à la courbe n'est pas définie.
   On pourra se faciliter le travail en remarquant que l'application $(x,y) \mapsto (y,x)$ laisse l'équation ci-dessus invariante.
2. Déterminer l'aire de la boucle du folium. Pour ce faire, on pourra remarquer que le couple $(x(t), y(t))$, avec $x(t) = \frac{3at}{t^3+1}$ et $y(t) = \frac{3at^2}{t^3+1}$, vérifie l'équation ci-dessus, pour tout $t \in \mathbb{R}$.