UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 12

21 & 22 mai 2007

Exercice 1.
Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes sur $\mathbb{R}^2$:

$$\text{(a) } w = 2(x+y)\,\mathrm{d}x + 2(x-3)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{(b) } w = \cos(x)\,\mathrm{d}x + \sin(y)\,\mathrm{d}y.$$

Même question pour la forme différentielle suivante sur $\mathbb{R}^3$:

$$w = (3x^2y + z^3)\,\mathrm{d}x + (3y^2z + x^3)\,\mathrm{d}y + (z^2x + y^3)\,\mathrm{d}z.$$

Exercice 2.
Montrer que la forme différentielle

$$w = 2xy^3e^z\,\mathrm{d}x + (3x^2y^2e^z + z^2)\,\mathrm{d}y + (x^2y^3e^z + 2yz + 3z^2)\,\mathrm{d}z$$

est exacte sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer toutes ses primitives.

Exercice 3.
Montrer que l'expression

$$w = \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + y\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et déterminer toutes ses primitives.

Exercice 4.
Trouver une fonction non nulle $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la forme différentielle

$$w = \varphi(x)(x+y+1)y\,\mathrm{d}x + \varphi(x)(2y+x)\,\mathrm{d}y$$

soit exacte sur $\mathbb{R}^2$, et déterminer ensuite toutes ses primitives.

Exercice 5.
On considère dans le plan $0xz$ l'ellipse d'équation

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 ,$$

avec $a < c$. Calculer le volume du tore obtenu en faisant tourner cette ellipse autour de l'axe $0z$.

Exercice 6.
Calculer l'intégrale

$$\iiint_D (ax+by+cz)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \text{ avec } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\} \text{ et } a,b,c \in \mathbb{R} .$$

Exercice 7.
Calculer le volume du domaine D défini par l'intersection d'une sphère de rayon $R > 0$ et d'un cylindre de révolution de rayon $R' > 0$, avec $R' < R$, ayant pour axe un diamètre de la sphère.