UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 2

26 & 27 février 2007

Exercice 1.
1. Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

2. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour $(x,y) \to (0,0)$ et (x,y) appartenant à l'ensemble de définition :

$$f(x,y) = \frac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|}, \qquad f(x,y) = \frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{y\ln(y-x^2)},$$

$$f(x,y) = x^y, \qquad f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}.$$

Exercice 2.
1. Soient $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}^*,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma\ \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^\gamma} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Montrer que la fonction f est continue si et seulement si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \gamma$.

2. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{e^{x^2y}-1}{xy} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ x & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto \begin{cases} (x^2+3x+2)\sin(\pi/y) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3.
Calculer

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{x^2+y^2+2xy-1}.$$

Exercice 4.
Calculer les limites quand $||(x,y)|| \to +\infty$ des fonctions suivantes (*le choix de la norme n'est pas précisé puisqu'elles sont toutes équivalentes sur* $\mathbb{R}^2$).

$$f(x,y) = \frac{x\arctan y}{x^2+y^2+1}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}, \qquad f(x,y) = (1+|x|+|y|)\sin(y^2).$$