UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 | Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan | Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

# Math IV, analyse (L2) – Fiche 3

**5 & 6 mars 2007**

**Exercice 1.**
Déterminer si les ensembles suivants sont compacts, connexes par arc :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x^2 + y^2 + z^2 - 4)(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \leq 0\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq \ 0 \text{ et } xy \leq 1\}$$

**Exercice 2.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On note $l$ sa limite. Montrer que l'ensemble $\{u_n : n \in N\} \cup \{l\}$ est compact.

**Exercice 3.**
Sur $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) muni de la métrique euclidienne $d$ on définit la distance entre deux sous-ensembles non vides $A$ et $B$ de $\mathbb{R}^p$ par la formule :

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

(1) Pour $x \in \mathbb{R}^p$ fixé, montrer que l'application $f : \ \mathbb{R}^p \ni y \mapsto f(y) = d(x, y) \in \mathbb{R}_+$ est continue.

(2) Si $A = \{x\}$ et $B$ est compact, montrer qu'il existe $y \in B$ tel que $f(y) = d(\{x\}, B)$.

(3) Si $A$ est compact, $B$ est fermé, et si $A$ et $B$ sont disjoints, montrer que $d(A, B) > 0$.

(4) Montrer en trouvant un exemple que la conclusion du point (3) n'est pas vraie en général si on remplace "$A$ compact" par "$A$ fermé".

**Exercice 4.**
Soit $K$ une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ une application continue telle que pour tout $x \in K$, $f(x) \neq x$. Montrer qu'il existe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $d(f(x), x) \geq \epsilon$ pour tout $x \in K$.

**Exercice 5.**
On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ pour } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = \sin(|xy|) \ .$$

Discuter de la continuité de ces fonctions en $(0, 0)$ et calculer les dérivées partielles premières. Etablir si ces fonctions sont différentiables dans $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 6 (Compacité et continuité uniforme).**
On considère la définition générale de la compactié :

Définition : Un sous-ensemble $K$ de $\mathbb{R}^n$ est *compact* si et seulement si tout recouvrement de $K$ par des ouverts admet un sous-recouvrement fini.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ (qui dépend de $x$ et $\varepsilon$) tel que $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ quelque soit $y \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x - y\| \leq \delta$. Montrer que la restriction de $f$ à un sous-ensemble compact $K$ de $\mathbb{R}^n$ défini une fonction $f_{\mathrm{K}}$ *uniformément continue*, c'est-à-dire $\forall x \in K$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ (qui dépend **uniquement** de $\varepsilon$) tel que $|f_{\mathrm{K}}(y) - f_{\mathrm{K}}(x)| \leq \varepsilon$ quelque soit $y \in K$ avec $\|x - y\| \leq \delta$.