UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 4

12 & 13 mars 2007

Différentiabilité en un point

L'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est dite *différentiable* en $a \in \mathbb{R}^n$ si elle satisfait la condition

$$\lim_{h\to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - df(a)(h)||}{||h||} = 0$$

où $df(a)$ est la matrice par rapport à la base canonique d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ qui est en fait la matrice jacobienne de f évaluée au point a. Plus précisément

$$df(a) = \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=a} \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Notons que dans cette fiche $m = 1$ et qu'alors les matrices jacobiennes se réduisent à des vecteurs lignes.

Propriété importantes liées à la différentiabilité en un point

1. Si une application est différentiable en un point, alors elle y est continue. L'énoncé réciproque n'est pas vrai en général, et cela est illustré dans le deuxième exercice.

2. Si une application est différentiable en un point, alors toutes ses dérivées directionnelles en ce point existent. L'énoncé réciproque n'est pas vrai en général, et cela est illustré dans le deuxième exercice.

3. Si une application est de classe $\mathcal{C}^1$ en un point, alors elle y est différentiable. L'énoncé réciproque n'est pas vrai en général, et l'exercice d'entraînement est une illustration de ce phénomène.

Exercice 1.
On considère les applications $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Vérifier que f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire leurs matrices jacobiennes.

Exercice 2.
On considère les applications $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Etudier la continuité de f et de g au point $(0,0)$.

2. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

3. Montrer que f et g admettent en $(0,0)$ des dérivées dans toutes les directions.

4. Montrer que f et g ne sont pas différentiables en $(0,0)$.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ici, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Calculer les dérivées partielles de f et déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ sur lequel l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer le gradient de f et donner son interprétation géométrique.

Exercice 5.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-y}\right)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition et calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.

Faire de même avec la fonction définie par $f(x,y) = x^y$ au voisinage du point $(1,0)$.

Exercice 6 (Entraînement).
Un des objectifs de cet exercice est d'illustrer que la condition d'être de classe $\mathcal{C}^1$ est plus forte que celle d'être differentiable. Nous étudions l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie ci-après :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer que f admet des dérivées partielles à l'origine mais que celles-ci n'y sont **pas** continues.

2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.