UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 5

19 & 20 mars 2007

Exercice 1 (Epreuve de novembre 2003).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extrema relatifs (locaux) de la fonction f.
2. La fonction f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \leq x \leq 0,\ y = x+1\}$$

et déterminer les extrema absolus de la restriction de f à L en précisant en quels points de L ils sont atteints.

Exercice 2 (Epreuve de mai 2001).
On considère la fonction définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1. Etudier les extréma relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. On pourra utiliser les symétries de la fonction $f(x,y)$ pour réduire le nombre de cas à étudier.
2. Démontrer que $f(x,y) \to 0$ quand $\|(x,y)\| \to \infty$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence des extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Exercice 3 (Exercice d'entraînement).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. Montrer que $f(x,y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x,y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a-t-il un minimum global ?