UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 6

26 & 27 mars 2007

Exercice 1.
On considère les applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, toutes suffisamment dérivables sur $\mathbb{R}^3$. Démontrer les relations suivantes :

(a) $\mathrm{div}(\mathrm{f\ F}) = \mathrm{f\ div(F)} + \mathrm{grad(f)} \cdot \mathrm{F}$,

(b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot(F)}) = 0$,

(c) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad(f)}) = 0$,

(d) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot(F)}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div(F)}) - \Delta \mathrm{F}$.

Exercice 2.
Un champ central dans $\mathbb{R}^3$ est défini par une application $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la forme $V(x) = f(r)x$, où $x \in \mathbb{R}^3$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et f est une application dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer le potentiel dont il est issu.

Exercice 3.
Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, et si oui, déterminer leurs potentiels scalaires.

1. $\vec{V}(x, y) = (y, x)$,
2. $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$,
3. $\vec{V}(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$,
4. $\vec{V}(x, y) = (y + \dfrac{1}{x}, x + \dfrac{1}{y})$,
5. $\vec{V}(x, y) = (x + y, x - y)$,
6. $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[)$ et soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ la transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires donnée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y) = (r, \theta)$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Déterminer le Laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire, calculer l'opérateur Δ_{pol} satisfaisant

$$(\Delta_{\mathrm{pol}} f) \circ \phi = \Delta(f \circ \phi) \ .$$