UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 7

2 & 3 avril 2007

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

1. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau L_k de f pour $k \in \{0, 1, 4, 9\}$. On se rappelle que
$$L_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = k\} .$$
2. Représenter graphiquement la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = x^2 + 4y^2$.
3. Déterminer une paramétrisation de L_4 de la forme
$$L_4 = \Big\{ (x, y) \mid x = x(t), y = y(t) \text{ avec } t \in [0, 2\pi[\Big\} .$$
4. Soit (x_0, y_0) un point de L_4. Préciser la direction de la droite tangente à L_4 en ce point.
5. Vérifier que le gradient ∇f, évalué en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, est toujours orthogonal à la ligne de niveau passant par ce point.
6. On veut se déplacer du point $(2, 1, 8)$ au point $(0, 0, 0)$, en restant sur la surface d'équation $z = x^2 + 4y^2$. Quel est le chemin qu'il convient de suivre pour parcourir la plus petite distance possible ? Pouvez-vous démontrer votre réponse ? Traçer la projection sur le plan x, y de ce chemin.

Exercice 2.
Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = e^{(x^2+y^2-4)^2}$.

1. Déterminer les points critiques de la fonction h ainsi que la nature de ces points.
2. On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par la relation
$$D = \Big\{(x, y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\Big\} .$$
Montrer que le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 est inclu dans D, puis déterminer les extrema de h sur le domaine D.

Exercice 3.
Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction.
2. Déterminer les lignes de niveaux de g.
3. En déduire l'inexistence d'extréma locaux pour g.
4. Calculer le grandient de g et montrer que la norme de celui-ci est constante le long de tout cercle centré en $(0, 0)$.
5. Pour tout point (x, y) du domaine de définition de g, déterminer la dérivée directionnelle de g en ce point suivant le vecteur unité $(\cos\theta, \sin\theta)$.
6. En fonction de (x, y), déterminer les directions dans lesquelles la dérivée directionnelle de g prend des valeurs extrémales.