UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 8

16 & 17 avril 2007

Exercice 1.
On considère l'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 \end{array}$$

1. Montrer que le théorème des fonctions implicites s'appliquent au point $(1,1)$.

2. Trouver la pente de la tangente à la courbe d'équation $f(x,y)=0$ au point $(1,1)$ et préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

Exercice 2.
On considère l'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \arctan(x+y) + e^x - 2y - 1 \end{array}$$

1. Montrer que le théorème des fonctions implicites s'appliquent en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit ϕ l'application qui exprime la deuxième coordonné en fonction de la première au voisinage de 0 et dont l'existence est justifiée par le théorème des fonctions implicites. Calculer le développement limité de ϕ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 3.
Paramétrer la courbe dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Exercice 4.
La *spirale logarithmique* est définie par l'application

$$\gamma \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t). \end{array}$$

Dans cet exercice nous supposerons $a \in \mathbb{R}_+^*$. On posera $x(t) = e^{at}\cos t$ et $y(t) = e^{at}\sin t$.

1. Dessiner la spirale logarithmique. Pour vous guider, répondez aux questions suivantes :
   1.1 Calculer les valeurs de t pour lesquelles $x(t) = 0$. Résolvez la même question pour y.
   1.2 Déterminer la pente de la tangente aux valeurs de t trouvées dans le point précédent.
   1.3 Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente s'annule.
   1.4 Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente n'est pas définie.
   1.5 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{t\to+\infty} x^2 + y^2 \quad ; \quad \lim_{t\to-\infty} x^2 + y^2.$$

2. Montrer que la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant un point courant à l'origine.

3. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
4. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0,0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
5. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.

Exercice 5.
L'hélice circulaire à pas constant est définie par l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{array} \right. \end{array}$$

où $r, h \in \mathbb{R}_+^*$ et

1. Montrer que la tangente forme avec l'axe Oz un angle constant.
2. Calculer la longueur d'un spire d'hélice ($t \in [0, 2\pi]$).