UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 9

23 & 24 avril 2007

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer les intégrales $\int_\Gamma f(x,y)\, \mathrm{d}s$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = (x^2 + y^3)$ et Γ est le bord du triangle de sommets $(0,0), (1,0)$ et $(0,1)$,
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ et Γ est le cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 2.
3. $f(x,y) = x$ et Γ est le quart d'ellipse d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ situé dans le quart de plan $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 2.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ par

$$F(x,y) = (2xy, x^2 + y^2)\ .$$

Calculer l'intégrale de ce champ de vecteurs le long des arcs orientés suivants :

1. Le segment orienté d'origine $(0,0)$ et d'extrémité $(1,1)$,
2. L'arc de parabole d'équation $y = x^2$, du point $(0,0)$ au point $(1,1)$.

Quelle conjecture en déduisez-vous ? Démontrer votre affirmation.

Exercice 3.
Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C (2x - y)\, \mathrm{d}x + (x + y)\, \mathrm{d}y$$

où C est le cercle de centre 0 et de rayon R, considéré avec l'orientation directe.

Exercice 4.
Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma (y - z)\, \mathrm{d}x + (z - x)\, \mathrm{d}y + (x - y)\, \mathrm{d}z$$

où Γ est l'arc de l'hélice circulaire paramétrée par $(r\cos(t), r\sin(t), ht)$, avec $r, h \in \mathbb{R}_+^*$ fixés et $t \in [0, 2\pi[$.

Exercice 5.
1) Calculer $\iint_D (x - y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ où D est la partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x$$

2) Calculer $\iint_D xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

3) Calculer $\iint_D e^{x+y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ sur le carré $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Exercice 6.
Calculer l'intégrale $\int\iint_D (x+y+z)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, où D est la partie de l'espace délimitée par les plans d'équation :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$

Exercice 7.
Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma -y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y$, où Γ est l'intersection de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1, et du plan d'équation $x + y + z = 1$, en indiquant le sens choisi du parcours.