UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Examen partiel

Corrigé du partiel du 27 mars 2007

Exercice 1.
Déterminer l'intérieur, la frontière et l'adhérence des ensembles suivants (aucune justification n'est demandée). Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés, compacts, connexes par arc, en justifiant brièvement votre réponse.

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,
$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \subset \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}$,
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}$.

Réponse :

A n'est ni ouvert ni fermé ; n'est pas compact ; est cpa.
B n'est ni ouvert ni fermé ; n'est pas compact ; n'est pas cpa.
C est fermé ; n'est pas ouvert ; est compact ; est cpa.

Exercice 2.
Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dfinie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{2x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = \alpha \end{cases}$$

1. Calculer la limite de $f(x, y)$ en $(0, 0)$. Trouver la valeur de α pour laquelle la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse : La limite demandée dans la question peut se calculer en introduisant les coordonnées polaires. On pose donc

$$\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}$$

et on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} \frac{2r^3\cos^3 t + 3r^3 \cos t \sin^2 t}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r(2\cos^3 t + 3\cos\sin^2 t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Désormais soit $\alpha = 0$. Calculer la dérivée de f en $(0, 0)$ suivant le vecteur $\overrightarrow{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

Réponse : La dérivée de f en $(0, 0)$ suivant le vecteur $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ est la valeur de la limite suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(h\cos\theta, h\sin\theta)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \times \frac{2h^3\cos^3\theta + 3h^3\cos\theta\sin^2\theta}{h^2} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} (2\cos^3\theta + 3\cos\theta\sin^2\theta) \\ &= \cos(\theta)(2 + \sin^2\theta) \end{aligned}$$

3. Trouver les dérivées partielles de f en $(0,0)$. Calculer le gradient $\overrightarrow{\text{grad}} f(0,0)$.

Réponse : Calculons les dérivées partielles en utilisant la définition :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^3}{h^3} = 2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

En conséquence, le gradient en $(0,0)$ est le vecteur $(2,0)$.

4. Vérifier si la formule liant la dérivée directionnelle et le gradient est vraie pour f en $(0,0)$.

Réponse En $(0,0)$, le produit scalaire du gradient et du vecteur directeur donne comme résultat

$$(2,0).(\cos\theta, \sin\theta) = 2\cos\theta \ .$$

Cette valeur est égale à la limite calculée au point 2 si et seulement si $\cos(\theta)\sin^2(\theta) = 0$. Cette égalité n'est vraie que si θ est un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

5. Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. Justifier la réponse.

Réponse : En un point $(x,y) \neq (0,0)$ l'application est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En effet, elle est le quotient de deux polynômes en x et y telle que le quotient ne s'annule qu'en $(0,0)$. En $(0,0)$, la différence entre les deux formules de dérivée directionnelle en $(0,0)$ (voir le point (4)) montre que l'application n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 3.
On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$g(x,y) = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{1-x^2-y} \ .$$

(1) Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté C, sur lequel g est bien définie. Représenter graphiquement cet ensemble. On pourra s'inspirer de l'exercice 1 pour cette question.

Réponse : Il y a deux conditions à satisfaire :

$$y - x^2 \geq 0 \ \textbf{ET} \ 1 - x^2 - y \geq 0 \ .$$

Ainsi, le domaine de l'application g est

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq 0 \textbf{ ET } 1 - x^2 - y \geq 0\} .$$

(2) On note par Γ la frontière de C. Calculer

$$\min_{(x,y)\in\Gamma} g(x,y) \qquad \textit{et} \qquad \max_{(x,y)\in\Gamma} g(x,y) ,$$

et déterminer en quel point (x,y) de Γ ces valeurs sont atteintes.

Réponse : Il y a deux façons de décrire la frontière Γ. La première donne une réponse un peu plus longue :

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = x^2 \text{ et } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \bigcup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = 1 - x^2 \text{ et } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} .$$

Ainsi, sur la frontière, g se réduit en une application d'une seule variable quelle que soit la parabole :

$$h(x) = g(x, x^2) = g(x, 1 - x^2) = \sqrt{1 - 2x^2} .$$

La dérivée de $h(x)$ est

$$h'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - 2x^2}} ,$$

et s'annule si et seulement si $x = 0$. A cette valeur de x correspondent deux points sur la frontière : $(0,0)$ et $(0,1)$. Comme x décrit un intervalle borné et fermé, pour compléter la liste des points où g peut atteindre ses valeurs extrémales sur Γ, il suffit d'y ajouter $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

Les valeurs extrémales et les points où elles sont atteintes découlent immédiatement de la liste suivante :

$$\begin{aligned} g(0,0) &= 1 \\ g(0,1) &= 1 \\ g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

La deuxième possibilité d'étude se base sur

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = x^2 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\right\} \bigcup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = 1 - x^2 \text{ et } \frac{1}{2} \leq y \leq 1\right\} .$$

Sur le premier ensemble $g(x,y) = g_1(y) = \sqrt{1 - 2y}$ tandis que sur le deuxième $g(x,y) = g_2(y) = \sqrt{2y - 1}$. Sur l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, g_1 atteint son maximum et son minimum aux valeurs 0 et $\frac{1}{2}$ respectivement puisque g_1 est décroissante. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, g_2 atteint son minimum et son maximum aux valeurs $\frac{1}{2}$ et 1 respectivement parce que g_2 est croissante. Les valeurs extrémales de g et les points correspondants sont bien sûr les mêmes que ceux déterminés dans la première réponse.

(3) Trouver les points critiques de g à l'intérieur de C, et déterminer la valeur de g en ces points.

Réponse : Le calcul des dérivées partielles fournit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= -x\left(\frac{1}{\sqrt{y-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y}}\right)\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}}+\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2-y}}\quad .\end{aligned}$$

La dérivée par rapport à la première variable s'annule si et seulement si $x = 0$. La dérivée par rapport à la deuxième variable s'annule si et seulement si

$$\sqrt{y-x^2} = \sqrt{1-x^2-y}\ .$$

L'application racine $t \mapsto \sqrt{t}$ étant bijective, ceci équivaut à

$$y - x^2 = 1 - x^2 - y\ .$$

Dans ce cas, il n'existe qu'une seule valeur possible pour y, c'est $\frac{1}{2}$. En conséquence, il n'existe qu'un seul point critique *à l'intérieur* de C : $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. En ce point, g atteint la valeur $\sqrt{2}$.

(4) En déduire la valeur minimale et la valeur maximale de g sur C.

Réponse : La valeur minimale de g sur C, évidente dès le début, est 0. Les deux points précédents montrent que la valeur maximale de g sur C est $\sqrt{2}$.

(5) Déterminer le développement de Taylor de g à l'ordre 1 au voisinage du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Réponse :

$$\begin{aligned}g\left(\frac{1}{2}+h, \frac{1}{2}+k\right) &= g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} h + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} k + o(||(h,k)||)\\ &= 1 - 2h + o(||(h,k)||)\ .\end{aligned}$$

Exercice 4.
Question de cours

Réponse : Révisez vos notes de cours.