

Mardi, 10 juin 2008

Durée : 2 heures

Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Le but de cet exercice est de déterminer la forme de toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

- (1) Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Montrer que la fonction $f(x, y) := \phi(x + y)$ est de classe C^1 et qu'elle vérifie l'équation (1).
- (2) Réciproquement, soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui vérifie l'équation (1). Montrons alors qu'il existe $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , telle que $f(x, y) = \phi(x + y)$. Pour cela, posons $g(s, t) := f\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right)$.
 - (a) Calculer $\frac{\partial g}{\partial t}(s, t)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$, et montrer que $\frac{\partial g}{\partial t}(s, t) = 0$.
 - (b) En déduire qu'il existe $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , telle que $g(s, t) = \phi(s)$.
 - (c) Conclure.

Exercice II. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D \frac{1}{1 + (x/2)^2 + y^2} dx dy$$

sur le domaine d'intégration

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Indication : On pensera à faire un changement de variables adéquat et on oubliera pas de calculer le jacobien.

Exercice III. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $g(x, y) = 2x^2 + y^4 - 4xy$.

- (1) Déterminer les points critiques de g .
- (2) Déterminer la nature de ces points (point col, maximum local ou minimum local).
- (3) Vérifier que $g(x, y) = 2(x - y)^2 - 2y^2 + y^4$, et en déduire que $g(x, y) \geq -2y^2 + y^4$ et que $g(x, y) \geq 2(x - y)^2 - 2y^2 = 2x(x - 2y)$. En déduire que si $g(x_0, y_0) \leq 0$ pour certain $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors $|x_0| \leq 2|y_0| \leq 2\sqrt{2}$, ce qui implique que $x_0^2 + y_0^2 \leq 10$. Finalement, démontrer qu'un des points critiques trouvés dans la question (1) est le minimum global de g et calculer la valeur de g en ce point.
- (4) Soit $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ la courbe de niveau 0 de g . Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique sur tout Γ sauf en 3 points, dont l'un est le point $(0, 0)$. Calculer les 2 autres points, et essayer de donner une explication de la raison de la non applicabilité du théorème des fonctions implicites en ces 3 points. On pourra éventuellement s'aider de la question (3) pour esquisser Γ et répondre à cette question.

Exercice IV. Utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire de la région de \mathbb{R}^2 délimitée par la courbe d'équation $[0, 2\pi] \ni t \mapsto (a \cos^3(t), a \sin^3(t)) \in \mathbb{R}^2$, pour $a > 0$.

Indication : Dans le calcul de l'intégrale on pourra utiliser la formule d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

et ses conséquences :

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{2ix}}{4} = \frac{\cos 2x + 1}{2} \\ \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} \\ \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{\cos 4x + 4 \cos 2x + 3}{8} \\ \cos^6 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^6 = \frac{\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10}{32}\end{aligned}$$

Exercice V. QCM

Attention : chaque question a au moins une réponse correcte mais peut avoir plus d'une réponse correcte. Pour avoir le demi-point d'une question, il est impératif de trouver toutes les réponses correctes.

- (1) La boule unité autour de l'origine par rapport à la norme $\| (x, y) \|_\infty = \max(|x|, |y|)$ est
- (a) le cercle unité autour de 0;
 - (b) le carré de sommets $(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)$;
 - (c) le carré de sommets $(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)$.
- (2) Soit l'ensemble $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Alors :
- (a) A est fermé;
 - (b) A est ouvert;
 - (c) A est compact;
 - (d) A est connexe par arc;
 - (e) A est borné.
- (3) La fonction f définie par $f(x, y) = \frac{1 + xy + x^3}{y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$
- (a) n'admet pas de limite en $(x, y) = (0, 0)$;
 - (b) admet la limite 0 en $(0, 0)$;
 - (c) admet la limite 1 en $(0, 0)$.
- (4) La dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , dans la direction du vecteur unitaire \vec{u} est donnée par la formule
- (a) $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) \cdot \vec{u}$;
 - (b) $(\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)) \wedge \vec{u}$;
 - (c) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + t\vec{u}) - f(x, y)}{t}$.
- (5) Le vecteur gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , calculé au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est
- (a) parallèle à la ligne de niveau passant par (x, y) ;
 - (b) nul si le point (x, y) est un minimum local;
 - (c) toujours positif ou zéro.

(6) La fonction $f(x, y) = x^{2008} + y^{2008}$

- (a) possède un maximum global sur \mathbb{R}^2 ;
- (b) possède un minimum global sur \mathbb{R}^2 ;
- (c) possède un maximum sur le carré $C = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

(7) Une application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

- (a) est un champ de vecteurs;
- (b) paramètre une courbe dans l'espace;
- (c) peut paramétrer un plan dans l'espace.

(8) Soit Δ le triangle défini par les trois droites : $x = 0$, $y = 0$ et $y = x - 1$. L'intégrale double

$\iint_{\Delta} \sin x e^{xy} dx dy$ est égale à

- (a) $\int_{-1}^0 \left(\int_0^1 \sin x e^{xy} dx \right) dy$;
- (b) $\int_{-1}^0 \left(\int_0^{y+1} \sin x e^{xy} dx \right) dy$;
- (c) $\int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 \sin x e^{xy} dy \right) dx$;
- (d) $\int_{x-1}^1 \left(\int_{-1}^0 \sin x e^{xy} dy \right) dx$.

(9) Soit $\vec{V} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$. Le rotationnel de \vec{V} est égal à

- (a) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix}$;
- (b) $y + z + x$;
- (c) $-(z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k})$;
- (d) $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

(10) Soit $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ une 1-forme différentielle et soit

$V = P(x, y)\partial/\partial x + Q(x, y)\partial/\partial y$ un champs de vecteurs. La forme ω est exacte

- (a) si et seulement si le champ de vecteurs V est un champ de gradient;
- (b) si et seulement si elle est fermée, c'est-à-dire $d\omega = 0$;
- (c) si et seulement si son intégrale curviligne sur tout circuit fermé est nulle.