Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE (L2) – Examen final

Mercredi 25 juin 2008. Deuxième session.
Durée : 1 heure 30 minutes
Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs défini par $F(x,y) = (ay, bx)$, pour $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la relation entre a et b de telle sorte que l'intégrale curviligne de F le long de n'importe quelle courbe simple C soit égale à l'aire du domain D dont C est la frontière.

Exercice II.

On considère la courbe Γ dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$\gamma : [0,\pi] \ni t \mapsto \big(3\cos(t), 5\sin(t), 4\cos(t)\big) \ .$$

(1) Montrer que la norme euclidienne du vecteur tangent ne dépend pas de t.
(2) Calculer la longueur d'arc de cette courbe entre les points $\gamma(0)$ et $\gamma(\pi)$.
(3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Γ avec le plan yz.
(4) Déterminer l'équation du plan perpendiculaire à Γ au point $\gamma(\frac{\pi}{2})$.
(5) Déterminer l'équation de la droite tangente à Γ au point $\big(\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 2\big)$.

Exercice III. On considère l'application

$$f \ : (x,y) \mapsto (y^2 - x^2)^{xy} \ (x^2 + y^2)$$

définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid x \leq y\}$. L'objectif de cet exercice est d'intégrer cette application sur la région délimitée par les courbes suivantes:

$$y^2 - x^2 = 0 \ , \ y^2 - x^2 = 1 \ , \ xy = a \ , \ xy = b$$

où a et b sont deux nombres réels vérifiant $0 < a < b$.

(1) Représenter la région D, sachant que l'équation $y^2 - x^2 = c$, avec $c \in \mathbb{R}$, est une hyperbole d'asymptotes $y = x$ et $y = -x$.
(2) On introduit un changement de variables en posant $u(x,y) = y^2 - x^2$ et $v(x,y) = xy$. Calculer les dérivées partielles suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(3) Calculer le déterminant de la matrice jacobienne $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$.
(4) En déduire que

$$\iint_D f(x,y) \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_0^1 \frac{u^v}{2} \ \mathrm{d}u\Big]\,\mathrm{d}v.$$

(5) Calculer la valeur de ces intégrales.

Numero de feuille d'examen à reporter : ______________________________

Exercice IV. QCM. Attention : chaque question peut avoir plus d'une réponse correcte. Pour avoir le demi-point d'une question, il est impératif de trouver toutes les réponses correctes, et uniquement les réponses correctes !

(1) La boule unité autour de l'origine par rapport à la norme $\| (x,y) \|_1 = |x| + |y|$ est

- (a) le cercle unité autour de 0; ☐
- (b) le carré de sommets $(0,1), (1,0), (-1,0), (0,-1)$; ☐
- (c) le carré de sommets $(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)$. ☐

(2) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

- (a) n'admet pas de limite en $(x,y) = (0,0)$; ☐
- (b) admet la limite 0 en $(0,0)$; ☐
- (c) admet la limite 1 en $(0,0)$. ☐

(3) Soit l'ensemble $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \geq 1\}$. Alors :

- (a) A est fermé; ☐
- (b) A est ouvert; ☐
- (c) A est compact; ☐
- (d) A est connexe par arc; ☐
- (e) A est borné. ☐

(4) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On considère la fonction f définie pour tout $(x,y) \in U := \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$, Alors, l'expression $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

- (a) n'est pas bien définie sur U; ☐
- (b) est une constante; ☐
- (c) est une fonction (non constante) de la dérivée de g. ☐

(5) Soit $h : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \exp(x + \sin y) \in \mathbb{R}$. Le développement de Taylor de h à l'ordre 1 au point $(0,0)$ est égal à

- (a) $1 + o(\|(x,y)\|^1)$; ☐
- (b) $1 + x + y + o(\|(x,y)\|^1)$; ☐
- (c) $1 + x + y + o(\|(x,y)\|^2)$. ☐

T.S.V.P. ↺

(6) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^{2008}\, y^{2008} \in \mathbb{R}$

- (a) possède un maximum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (b) possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (c) possède un extremum sur le disque unité autour de $(0, 0)$. ☐

(7) Soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $V(x, y) = \big(P(x, y), Q(x, y)\big)$ avec $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit également Γ une courbe de $\mathbb{R}^2$ lisse par morceaux allant d'un point a à un point b de $\mathbb{R}^2$. Une condition ***suffisante*** pour que V soit un champ de gradient est

- (a) $\operatorname{div} V = 0$; ☐
- (b) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; ☐
- (c) que son intégrale curviligne sur Γ ne depende que de a et de b. ☐

(8) Le changement de variables $x = \frac{1}{2}\rho\cos(\theta)$ et $y = 2\rho\sin(\theta)$ a pour jacobien $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}$:

- (a) -1; ☐
- (b) 1; ☐
- (c) ρ; ☐
- (d) $\rho^2 \cos\theta \sin\theta$. ☐

(9) Une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

- (a) est un champ de vecteurs; ☐
- (b) paramètre une courbe dans l'espace; ☐
- (c) peut paramétrer un plan dans l'espace. ☐

(10) Soit Δ la partie de $\mathbb{R}^2$ définie entre la parabole $x = y^2$ et la droite $x = 1$. L'intégrale double $\displaystyle\iint_\Delta \sin x\; e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est égale à

- (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2}^{1} \sin x\; e^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$; ☐
- (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1} \sin x\; e^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$; ☐
- (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{y^2} \sin x\; e^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$; ☐
- (d) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sin x\; e^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$. ☐