UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 1

25 février 2008

Exercice 1 (Ouvert / fermé, intérieur et frontière).

Remarque préliminaire : pour vous chauffer, il n'est pas inutile de montrer qu'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est ouvert, et qu'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est bien fermé.

Soit $\{x\}$ un singleton dans $\mathbb{R}$. Alors $\{x\}$ est fermé car $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ est ouvert. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$, on a $B\Big(y, \frac{|x-y|}{2}\Big) \subset \mathbb{R} \setminus \{x\}$. L'intérieur de $\{x\}$ est vide et sa frontière est lui-même.

Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$. Alors $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est fermé car son complémentaire est ouvert (même démonstration que ci-dessus), son intérieur est vide et sa frontière est lui-même.

Pour $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, on a le même résultat par une démarche analogue. Attention à ne pas simplement argumenter comme quoi $\mathbb{N}$ est une réunion infinie de singletons, qui sont chacun fermé.

L'ensemble $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0,\ 1 - \frac{1}{n}]$ n'est ni ouvert ni fermé car il est fermé à gauche ($0 \in D$) mais ouvert à droite ($1 \notin D$). Son intérieur est $]0, 1[$ et sa frontière est $\{0, 1\}$.

L'ensemble $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 2\}$ est ouvert car pour tout $(x, y, z) \in D$, on a $B((x, y, z), \frac{z-2}{2}) \subset D$. Son intérieur est lui-même et sa frontière est $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2\}$.

L'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1 \text{ et } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{16}\}$ n'est ni ouvert ni fermé. Pour le montrer, il suffit de remarquer que le complémentaire de D est formé de deux parties disjointes : la boule ouverte $B((\frac{1}{2}, 0), \frac{1}{4})$ et du complémentaire de la boule ouverte $B((1, 0), 1)$, qui est donc fermé. L'intérieur de D est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1 \text{ et } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{16}\}$ et sa frontière est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ ou } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{16}\}$.

L'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ est fermé car son complémentaire est ouvert. En effet, en tout point du complémentaire de D on peut définir une boule ouverte centrée en ce point et dont le rayon est la moitié de la distance entre ce point et l'ensemble D. Cette boule sera entièrement contenue dans le complémentaire de D. L'intérieur de D est vide, et sa frontière est lui-même. Remarque supplémentaire : pour déterminer la distance entre un point (a, b) dans le complémentaire de D et l'ensemble D lui-même, il s'agit de minimiser la grandeur $\sqrt{(x-a)^2 + (x^2 - b)^2}$ qui est la distance entre un point (x, x^2) de D et le point (a, b) du complémentaire. Pour ce faire, on pourra chercher le minimum de la fonction $x \mapsto \sqrt{(x-a)^2 + (x^2 - b)^2}$ en fonction de (a, b), en calculant la valeur de x pour laquelle la dérivée de cette fonction s'annule.

L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$ est ouvert car il est l'intersection des trois ouverts suivants : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < 1\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y|\}$. Son intérieur est lui-même et sa frontière est l'union des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$: $\{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $\{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $\{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $\{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$ et $\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

L'ensemble $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \big(y - \frac{1}{n}\big)^2 \leq \frac{1}{4n^2}\}$ n'est ni ouvert ni fermé. En effet, les points $(0, 0)$ et $(0, 3/2)$ appartiennent à la frontière de D, mais $(0, 0)$ n'appartient pas à D alors que $(0, 3/2)$ appartient à D. L'intérieur de D est donné par $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \big(y - \frac{1}{n}\big)^2 < \frac{1}{4n^2}\}$ et la frontière de D par

$$D \cup \{(0, 0)\} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \big(y - \tfrac{1}{n}\big)^2 < \tfrac{1}{4n^2}\}.$$

Remarquer qu'il est très difficile de décrire la frontière plus précisément.

Exercice 2.
1) Montrons que tout ensemble D peut être muni d'une métrique. En effet, pour tout $x, y \in D$, posons $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 0$ si $x = y$. Il suffit maintenant de vérifier que l'application $d : D \times D \to \mathbb{R}_+$ est bien une métrique sur D, ce qui est très simple.

2) La seule difficulté pour montrer que d' définit bien une métrique est l'inégalité triangulaire. Pour ce faire, considérons l'application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Cette fonction est croissante car $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$, et donc $f(a) \leq f(b)$ pour tout $0 \leq a \leq b < \infty$. En utilisant cette observation pour la première inégalité suivante, on a pour tout $x, y \in E$:

$$\begin{aligned}
d'(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \\
&\leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \\
&= d'(x,z) + d'(z,y).
\end{aligned}$$

Le fait que d' soit strictement bornée par 1 suit de sa définition.

Remarque sur les espaces métriques et les espaces normés : on a vu en 1) que n'importe quel ensemble peut être muni d'une métrique. En revanche, ce n'est pas le cas pour une norme. En effet, il faut une structure d'espace vectoriel pour pouvoir définir une norme. Non seulement on veut que la norme de 0 (origine de l'espace vectoriel) soit nulle, mais en plus on veut que $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, d'où le fait qu'il faille que l'expression λx ait un sens. Par ailleurs, on peut remarquer qu'une métrique bornée (sur un espace vectoriel) ne peut jamais provenir d'une norme, c'est-à-dire que pour une métrique d bornée par une constante $c < \infty$, il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ telle que $d(x, y) = \|x - y\|$. En effet, on aurait alors l'absurdité suivante

$$|\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = d(0, \lambda x) \leq c$$

pour une tout x et tout λ. Ceci ne peut être vérifié que si $\|x\| = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.

Exercice 3 (Normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$).
On considère les trois applications de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définies pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|, \qquad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

1. Vérifier que ces applications définissent des normes. <u>Indication</u> : Pour $\|\cdot\|_2$, en vérifiant l'inégalité triangulaire, vous pouvez utiliser sans preuve le *lemme de Schwartz*, à savoir : *Si $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, alors*

$$|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

2. Dessiner la boule unité B_j dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_j$ pour $j \in \{2, \infty, 1\}$, et montrer que ces trois normes sont équivalentes.

Réponse :

1) Montrons que $\|\cdot\|_2$ est une norme. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

1. $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_j^2 = 0 \Leftrightarrow x_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,
2. $\|x\|_2 \geq 0$ car $\sum_{j=1}^n x_j^2 \geq 0$ (somme de nombres positifs ou nuls),
3. $\|\lambda x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n (\lambda x_j)^2 = \lambda^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 = \lambda^2 \|x\|_2^2$, d'où $\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \|x\|_2$,
4. pour $y \in \mathbb{R}^n$, on a

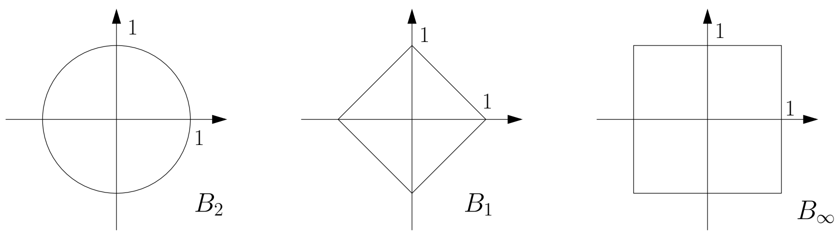
$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2 = \Big| \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2 \Big| \\
&= \Big| \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2 + 2x_j y_j) \Big| \leq \sum_{j=1}^n x_j^2 + \sum_{j=1}^n y_j^2 + 2 \Big| \sum_{j=1}^n x_j y_j \Big| \\
&\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \, \|y\|_2 \leq \left(\|x\|_2 + \|y\|_2 \right)^2 ,
\end{aligned}$$

où l'inégalité de Schwartz a été utilisée dans la deuxième inégalité. On en conclut que

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Le fait que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent également des normes se montre de façon analogue.

2) Les trois boules unités pour ces normes sont les suivantes.



On se convaint facilement qu'il suffit de montrer que

$$\|x\|_2 \leq \alpha \, \|x\|_\infty \leq \beta \, \|x\|_1 \leq \gamma \, \|x\|_2 \ ,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, avec $\alpha, \beta, \gamma > 0$, pour obtenir que les trois normes sont équivalentes. On obtient alors les trois inégalités nécessaires de la façon suivante :

(a) $\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq n \max_{j \in \{1, \ldots, n\}} x_j^2 = n \|x\|_\infty^2$, d'où $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \, \|x\|_\infty$,

(b) $\|x\|_\infty = \max_{j \in \{1, \ldots, n\}} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| = \|x\|_1$, d'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$,

(c) $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \leq \sqrt{n} \big(\sum_{j=1}^n x_j^2 \big)^{1/2} = \sqrt{n} \|x\|_2$, ou nous avons utilisé le lemme de Schwartz pour l'inégalité, d'où le résultat : $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$.

Exercice 4 (Notion de voisinage).
Soit x un point de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété *dans un voisinage de* x si cette propriété est satisfaite au moins dans un ensemble ouvert contenant x. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont positives dans un voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} + x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ \frac{1}{10}, & x = 0. \end{cases}$$

Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont définies dans un voisinage de l'origine :

$$f(x,y) = \sqrt{x+y+1}, \qquad f(x,y) = \ln\big(\sin(x^2+1)\big).$$

Réponse :

1) La première fonction f n'est pas positive dans un voisinage de 0 car quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que $f(x) < 0$. En effet, soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k > \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \frac{1}{4}$. Alors si $x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, on a $f(x) = \sin\big(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big) = -1$ et $x < \varepsilon$ car $k > \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\pi k - \frac{\pi}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} < \varepsilon$.

2) Pour la deuxième fonction, on remarque que $\frac{1}{10} - |x| \leq f(x) \leq \frac{1}{10} + |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $f(x) > 0$ pour tout $x \in]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}[$. Donc dans un voisinage de 0, la fonction f est bien positive.

3) On remarque que pour $x + y > -1$, la fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{x+y+1}$ est bien définie. Donc en particulier pour tout $(x,y) \in B((0,0), 1/2)$ la fonction est bien définie, et donc elle est bien définie dans un voisinage de $(0,0)$.

4) Pour tout $(x,y) \in B((0,0), 1/2)$, on a que l'application $(x,y) \mapsto \ln\big(\sin(x^2+1)\big)$ est bien définie. Donc cette fonction est bien définie dans un voisinage de $(0,0)$.

Exercice 5.
1) On vérifie que l'application suivante définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$:

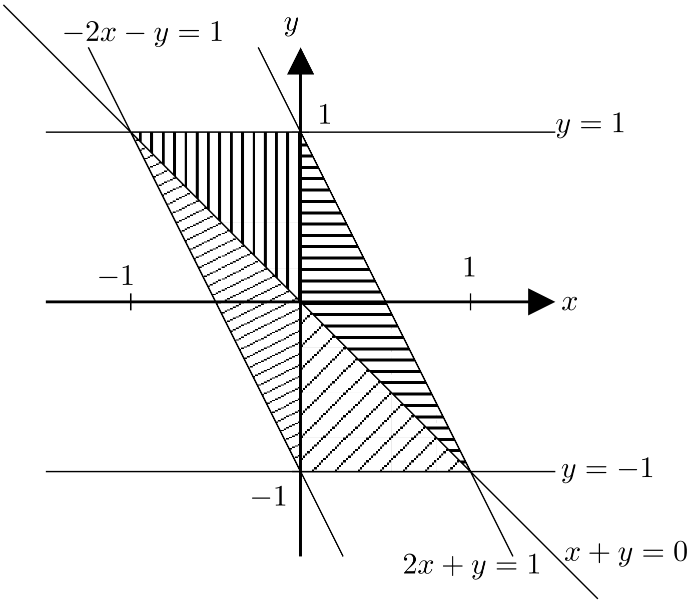
$$\begin{array}{cccll} N & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \|(x,y)\| := |x+y| + |x| \end{array}$$

En effet, on a facilement $\|(x,y)\| = 0 \equiv (x,y) \Leftrightarrow (0,0)$, $\|(x,y)\| \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|\lambda(x,y)\| = |\lambda|\|(x,y)\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et que $\|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\| \leq \|(x_1, y_1)\| + \|(x_2, y_2)\|$.

Pour dessiner la boule unité centrée à l'origine, il faut considérer les quatre cas suivants :

1. si $x + y > 0$ et $x > 0$, alors $\|(x,y)\| \leq 1 \Leftrightarrow 2x + y \leq 1$,
2. si $x + y > 0$ et $x < 0$, alors $\|(x,y)\| \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1$,
3. si $x + y < 0$ et $x > 0$, alors $\|(x,y)\| \leq 1 \Leftrightarrow -y \leq 1$,
4. si $x + y < 0$ et $x < 0$, alors $\|(x,y)\| \leq 1 \Leftrightarrow -2x - y \leq 1$.

En reportant ces quatre cas sur un dessin, on obtient la figure suivante.



$-2x-y=1$
y
1
$y=1$
-1
1
x
$y=-1$
-1
$2x+y=1$
$x+y=0$