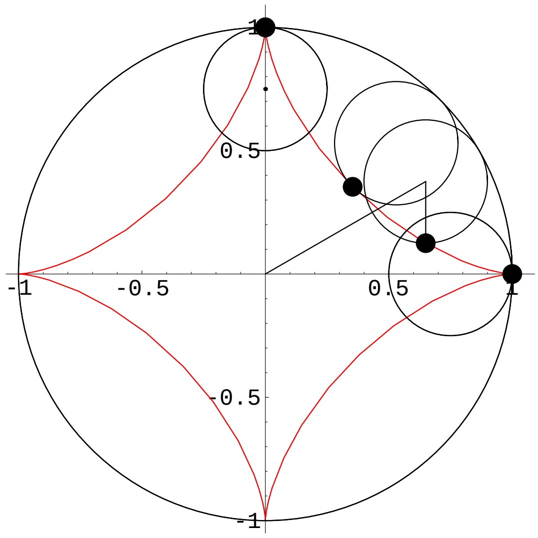
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 10

19 mai 2008

Exercice 1.
Un astroïde est la courbe de $\mathbb{R}^2$ *construite de la façon suivante : On considère un cercle de rayon* $\frac{1}{4}$ *avec un point distingué (cf. dessin ci-dessous) situé initialement au point* $(0,1)$*. On fait rouler ce cercle à l'intérieur d'un cercle de rayon* 1 *et de centre* $(0,0)$*. L'astroïde est alors composé de toutes les positions successives du point distingué.*



1. *Montrer que l'astroïde peut être paramétrisé par l'application*
$$[0,2\pi[\ \ni\ t \mapsto (\cos^3(t), \sin^3(t)) \in \mathbb{R}^2.$$
2. *Calculer la longueur d'un quart de l'astroïde.*
3. *Déterminer l'équation de la tangente au point* $(\cos^3(t), \sin^3(t))$ *ainsi que les intersections de cette droite avec les deux axes, puis calculer la longueur du segment entre ces deux points.*

Réponse : 1) Avec $t \in [0,2\pi[$ l'argument du centre du petit cercle, on peut paramétriser la position du centre de ce cercle par
$$(3/4\cos(t), 3/4\sin(t)).$$

Le petit cercle tourne dans la direction négative et la circonférence du grand cercle est exactement quatre fois la circonférence du petit cercle. Pour $t = \pi/2$, le point distingué touche donc le grand cercle pour la deuxième fois et le petit cercle a tourné par un angle de $\frac{3\pi}{2}$.

Au total, le petit cercle tourne par un angle de 6π, c.-à.-d. effectue 3 tours. Donc, par rapport au centre du petit cercle, le mouvement du point distingué est donné par
$$(1/4\cos(-3t), 1/4\sin(-3t)).$$

En additionant les deux mouvements, on a la paramétrisation du point distingué suivante :

$$\frac{1}{4}(3\cos t + \cos(-3t), 3\sin t + \sin(-3t)).$$

Par un simple calcul trigonométrique on arrive à l'expression souhaitée $(\cos^3(t), \sin^3(t))$ (on a utilisé les relations $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ et $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$).

2) On a

$$\gamma'(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos t)$$

et donc

$$|\gamma'(t)| = 3|\cos(t)\sin(t)| \cdot |(-\cos(t), \sin(t))| = 3|\cos(t)\sin(t)|.$$

Dans le premier quart de l'astroïde, les fonctions sin et cos sont positives, et donc

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} 3\sin(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\ \mathrm{d}t = \frac{3}{2}.$$

3) La tangente est donnée par

$$\begin{aligned} y &= \frac{3\sin^2(t)\cos(t)}{-3\cos^2(t)\sin(t)}x + \sin^3(t) - \frac{3\sin^2(t)\cos(t)}{-3\cos^2(t)\sin(t)}\cos^3(t) \\ &= -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}x + \sin^3(t) + \sin(t)\cos^2(t) \\ &= -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}x + \sin(t) \end{aligned}$$

L'intersection avec $y = 0$ est $(\cos(t), 0)$ et celle avec $x = 0$ est $(0, \sin(t))$. Donc la longueur est $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Remarquons que cette propriété peut également être utilisée pour définir l'astroïde.

Exercice 2.
Soit (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) les sommets successifs d'un polygone convexe.

1. *Calculer l'intégrale curviligne $\frac{1}{2}\int_\gamma x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x$, où γ est la courbe fermée et orientée positivement, formée par les bords du polygone.*
2. *Comparer avec l'aire du polygone pour $n = 3$ et $(x_3, y_3) = (0, 0)$.*

Réponse : En introduisant la convention $x_{n+1} = x_1$, on peut paramétriser le segment reliant (x_i, y_i) à (x_{i+1}, y_{i+1}) par l'application

$$\gamma_i : [0, 1[\ \ni t \mapsto ((1-t)x_i + tx_{i+1}, (1-t)y_i + ty_{i+1}) \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\gamma_i} x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[((1-t)x_i + tx_{i+1})(y_{i+1} - y_i) - ((1-t)y_i + ty_{i+1})(x_{i+1} - x_i)\Big]\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) \end{aligned}$$

En sommant alors sur l'indice i, on obtient finalement le résultat

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}).$$

2) L'aire d'un triangle est exactement le résultat $\frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_2 x_1)$ du calcul ci-dessus.

Exercice 3.
Montrer que les intégrales suivantes ne sont pas égales :

$$\int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}x\Big] \, \mathrm{d}y \qquad \textit{et} \qquad \int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}y\Big] \, \mathrm{d}x \ ,$$

et expliquer pourquoi le théorème de Fubini n'est pas applicable. *Indication : On commencera par calculer les dérivées*

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) \qquad \textit{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan(x)) \ .$$

Réponse : Avec les indications fournies on calcule facilement

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}x\Big] \, \mathrm{d}y &= \int_0^1 \Big[-\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^1\Big] \, \mathrm{d}y \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^1 -\frac{1}{1+y^2} \, \mathrm{d}y = -\lim_{\epsilon \to 0} \Big[\arctan(y)\big|_{\epsilon}^1\Big] \\
&= -\arctan(1) + \arctan(0) = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Par antisymétrie, la deuxième intégrale vaut immédiatement $\frac{\pi}{4}$. Donc, le résultat depend de l'ordre d'intégration. En effet, le théorème de Fubini n'est pas applicable dans cette intégrale. La raison, ou une raison, va légèrement au delà de la *non* continuité de l'application

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \in \mathbb{R}$$

en $(0,0)$. D'ailleurs, comme l'indique un théorème du cours, l'*intégrabilité* ne nécessite pas la continuité. D'après ce même théorème, il suffit que les points de discontinuité soient d'aire nulle. “Mais alors, qu'est-ce qui ne va pas ?” pourrait-on dire. Après tout, notre application est continue partout sauf peut-être en $(0,0)$, et un seul point *est* d'aire nulle. La réponse à ce “peut-être” nous fournira une clé.

Passons aux coordonnées polaires d'abord.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))}{r^4} \\
&= \frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{r^2} \\
&= \frac{\cos(2\theta)}{r^2} \ .
\end{aligned}$$

Il est bien visible que pour une valeur de 2θ qui n'annulera pas le numérateur, le quotient $\frac{\cos(2\theta)}{r^2}$ ne sera pas borné quand r tend vers 0. Il s'agit d'un comportement discontinu mais qui va au-delà de cette discontinuité, et qui était exclu par les hypothèses du théorème du cours.

Cet exercice a un autre corollaire : il est utile, voire indispensable de réviser les notes de cours, en essayant de les comprendre.

Exercice 4.
Calculer les intégrales

1.
$$\int_0^\infty e^{-x^2} \ \mathrm{d}x \ ,$$

2.
$$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z \ ,$$

où D est l'intérieur de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1, et extérieur au cône de révolution d'axe Oz et d'angle $\pi/3$.

Réponse : 1) Nous nous contentons de remarquer que si on appelle I l'intégrale à calculer, alors

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} \ \mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-y^2} \ \mathrm{d}y \ .$$

Un passage en coordonnées polaires permet de conclure facilement. On trouve : $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) Pour cette intégrale, l'approche la plus efficace est d'introduire les coordonnées sphériques. Nous adoptons le changement de coordonnées suivant qui n'est aucunement pas le seul utilisé dans les livres que vous allez éventuellement utiliser :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \rho \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y & = & \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z & = & \rho \cos(\theta) \end{array} \right.$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in [0, \pi[$ et $\phi \in [0, 2\pi]$. Il en découle que le déterminant de la matrice Jacobienne est $\rho^2 \sin(\theta)$. En conséquence, dans notre cas particulier on obtient les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
\iiint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} \quad \mathrm{d}x \;\; \mathrm{d}y \;\; \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_0^1 \frac{\rho^2\sin^2(\theta)}{\rho^2}\rho^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{3}\sin^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{3}(\sin(\theta)-\cos^2(\theta)\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\mathrm{d}\phi \\
&\quad +\frac{1}{9}\int_0^{2\pi}\left(\cos^3\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{11\pi}{18}
\end{aligned}
$$

Exercice 5 (Entraînement).
Calculer l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ *limité par les courbes d'équation*

$$y = ax \ , \ y = x/a \ , \ y = b/x \ , y = 1/bx \ , \ \text{où} \ \ a > 1 \ , \ b > 1 \ .$$

Réponse : On notera D le domaine dont on veut calculer la surface. Pour développer une bonne méthode de solution à cet exercice il est utile de constater que

$$\frac{1}{a} < \frac{y}{x} < a \quad , \quad \frac{1}{b} < yx < b \ .$$

Le changement de variables efficace en découle :

$$\begin{cases} u &= \frac{y}{x} \\ v &= xy \end{cases}$$

Une certaine prudence est obligatoire car ce changement de variables n'est pas injectif, plus précisément l'application ϕ qui associe à chaque paire (x, y) la paire (u, v) n'est pas injectif sur son domaine de définition. Ca devient plus visible quand on essaye d'exprimer x et y en fonction de u et de v :

$$\begin{cases} x^2 &= \frac{v}{u} \\ y^2 &= uv \end{cases}$$

En effet, ϕ associe deux points symétriques par rapport à l'origine de D au même point dans le plan (u, v). Cette complication peut être apprivoisée en restreignant $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, \infty[$. Il suffira de doubler la valeur de l'intégrale que l'on aura calculée si l'on désire également considérer la partie de la figure dans le $3^{\text{ième}}$ quadrant.

Le paragraphe précédent nous permet d'écrire

$$\begin{cases} x &= \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y &= \sqrt{uv} \end{cases}$$

Alors

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{v}}{2u^{3/2}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

La valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne est alors $\frac{1}{2u}$. La valeur de l'aire est alors, si l'on considère les deux parties mentionnées ci-dessus, le double de la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{\frac{1}{b}}^{b} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{2u} \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v$$

Celle-ci vaut $\left(b - \frac{1}{b}\right) \ln(a)$. Donc l'aire totale de D est $2\left(b - \frac{1}{b}\right) \ln(a)$.