Math IV, analyse (L2) – Fiche 11

26 mai 2008

Exercice 1.
Calculer l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes d'équation

$$y = ax \ , \ y = x/a \ , \ y = b/x \ , y = 1/bx \ , \text{ où } \ a > 1 \ , \ b > 1 \ .$$

Réponse : On notera D le domaine dont on veut calculer la surface. Pour développer une bonne méthode de solution à cet exercice il est utile de constater que

$$\frac{1}{a} < \frac{y}{x} < a \quad , \quad \frac{1}{b} < yx < b \ .$$

Le changement de variables efficace en découle :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \frac{y}{x} \\ v & = & xy \end{array} \right.$$

Une certaine prudence est obligatoire car ce changement de variables n'est pas injectif, plus précisément l'application ϕ qui associe à chaque paire (x, y) la paire (u, v) n'est pas injectif sur son domaine de définition. Ca devient plus visible quand on essaye d'exprimer x et y en fonction de u et de v :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^2 & = & \frac{v}{u} \\ y^2 & = & uv \end{array} \right.$$

En effet, ϕ associe deux points symétriques par rapport à l'origine de D au même point dans le plan (u, v). Cette complication peut être apprivoisée en restreignant $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, \infty[$. Il suffira de doubler la valeur de l'intégrale que l'on aura calculée si l'on désire également considérer la partie de la figure dans le $3^{\text{ième}}$ quadrant.

Le paragraphe précédent nous permet d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y & = & \sqrt{uv} \end{array} \right.$$

Alors

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{v}}{2u^{3/2}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

La valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne est alors $\frac{1}{2u}$. La valeur de l'aire est alors, si l'on considère les deux parties mentionnées ci-dessus, le double de la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{\frac{1}{b}}^{b} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{2u} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Celle-ci vaut $\left(b - \frac{1}{b}\right) \ln(a)$. Donc l'aire totale de D est $2\left(b - \frac{1}{b}\right) \ln(a)$.

Exercice 2.
Calculer l'intégrale

$$\iint_C (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

sur le domaine C contenant l'origine et délimité par le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{5}$, et la droite d'équation $x+y+3=0$.

Réponse : On peut envisager plusieurs démarches pour cette question ; nous en donnons deux. La première, plus compliquée, met en relief certaines de vos connaissances acquises en algèbre linéaire tandis que la deuxième simple et élémentaire utilise certaines symétries de l'application

$$(x,y) \to x+y.$$

Commençons par la première réponse. Le domaine C d'intégration peut être transformé en un domaine C' en posant

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \tag{1}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \tag{2}$$

Ce changement de variables s'explique plus conceptuellement avec vos connaissances en algèbre linéaire. On transforme l'axe des x en la droite $y=-x$ et l'axe des y en la droite $y=x$. En d'autres termes, on tourne les deux axes par $-\frac{\pi}{4}$. L'image de la base canonique (e_1,e_2) est (f_1,f_2), qui s'écrit en fonction de (e_1,e_2) de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lllll} f_1 & = & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)e_1 & + & \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)e_2 \\ f_2 & = & \cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)e_1 & + & \sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)e_2 \end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{lllll} f_1 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_1 & - & \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_2 \\ f_2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_1 & + & \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_2 \end{array}\right.$$

Si on représente en colonnes les expressions pour f_1 et f_2 respectivement, on obtient la matrice de passage qui transforme tout vecteur (u,v) par rapport à la base (f_1,f_2) (en d'autres termes uf_1+vf_2) en un vecteur (x,y) par rapport à la base (e_1,e_2) (xe_1+ye_2) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Le passage inverse

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donne les changements (1) et (2) ci-dessus.

Maintenant nous revenons à notre intégration. On remplace x et y par u et v en utilisant le changement de variables. L'intégrale se met sous forme

$$\begin{aligned}
2\int_{\frac{-3}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\int_{0}^{\sqrt{5-v^2}} v\sqrt{2}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v &= 2\int_{\frac{-3}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{2}\ [vu]_0^{\sqrt{5-v^2}}\ \mathrm{d}v \\
&= 2\int_{\frac{-3}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{2}\ \ v\sqrt{5-v^2}\ \mathrm{d}v \\
&= 2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{3}\left(5-v^2\right)^{3/2}\right]_{\frac{-3}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

La deuxième méthode est plus directe. Elle utilise un raisonnement génŕal. L'application définie par la loi $f(x,y) = x+y$ a la propriété $f(-x,-y) = -f(x,y)$. En plus, un disque centré à l'origine est symétrique par rapport à $(0,0)$, en d'autres termes (x,y) est dans le disque si et seulement si $(-x,-y)$ y est aussi. Or, sur tout domaine D comportant cette symétrie, une application f ayant la propriété susmentionnée aura l'intégrale (si intégrale il y a) égale à 0. En effet, un changement de variable en posant $X=-x$ et $Y=-y$ montre que

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \iint_D f(-X,-Y)\ \mathrm{d}X\ \mathrm{d}Y \\
&= -\iint_D f(X,Y)\ \mathrm{d}X\ \mathrm{d}Y
\end{aligned}$$

En conséquence on peut évaluer l'intégrale en question sur le domaine délimité par la droite et le cercle donnés et ne contenant pas l'origine. L'intégrale à calculer est alors

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1}\int_{\sqrt{5-y^2}}^{-y-3}(x+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{5-y^2}}^{-y-3}(x+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{-1}\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{-\sqrt{5-y^2}}^{-y-3}\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{-1}\left(2+y\sqrt{5-y^2}\right)\ \mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale que nous cherchons est donc l'opposé de ce que nous venons de calculer, ce qui est cohérent en particulier avec la première méthode.

Exercice 3.
Montrer que la forme différentielle

$$w = 2xy^3e^z\ \mathrm{d}x + (3x^2y^2e^z + z^2)\ \mathrm{d}y + (x^2y^3e^z + 2yz + 3z^2)\ \mathrm{d}z$$

est exacte sur $\mathbb{R}^3$, et déterminer toutes ses primitives.

Réponse : On sait que w est exacte s'il existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy^3e^z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3x^2y^2e^z + z^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2y^3e^z + 2yz + 3z^2 \ .$$

Or en intégrant la première équation par rapport à x on trouve que

$$f(x,y,z) = x^2y^3e^z + g(y,z)$$

avec $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Pour déterminer g, on dérive l'expression obtenue pour f par rapport à y, en imposant la dernière égalité :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y^3e^z + g(y,z)] = 3x^2y^2e^z + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 3x^2y^2e^z + z^2 \ .$$

On trouve ainsi que $\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = z^2$, d'où $g(y,z) = yz^2 + h(z)$ avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. En dérivant par rapport à z l'expression pour f obtenue jusqu'à maintenant, et en imposant la dernière égalité, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}[x^2y^3e^z + yz^2 + h(z)] = x^2y^3e^z + 2yz + h'(z) = x^2y^3e^z + 2yz + 3z^2 \ .$$

On obtient alors que $h(z) = z^3 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a vérifié que w est bien une différentielle exacte, avec $f(x,y,z) = x^2y^3e^z + yz^2 + z^3 + c$.

Exercice 4.
Trouver une fonction non nulle $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la forme différentielle

$$w = \phi(x)(x+y+1)y \, \mathrm{d}x + \phi(x)(2y+x) \, \mathrm{d}y$$

soit exacte sur $\mathbb{R}^2$, et déterminer ensuite toutes ses primitives.

Réponse : Pour être exacte, la forme différentielle doit nécessairement être fermée et donc vérifier pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\phi(x)(x+y+1)y] = \frac{\partial}{\partial x}[\phi(x)(2y+x)] \ .$$

Or cette égalité est équivalente à :

$$\phi(x)(x+2y+1) = \phi'(x)(2y+x) + \phi(x) \Leftrightarrow \phi(x) = \phi'(x) \qquad \forall \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

La solution à cette équation est $\phi(x) = ce^x$ avec $c \in \mathbb{R}$. On trouve alors par une démarche analogue à l'exercice précédent que w est bien une forme différentielle exacte, avec $f(x,y) = ce^x(y^2 + xy) + d$ pour $c, d \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.
Calculer $\int_\Gamma P(x,y) \, \mathrm{d}x + Q(x,y) \, \mathrm{d}y$, avec pour $(x,y) \neq (1,0)$,

$$P(x,y) = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad Q(x,y) = \frac{x(x-1) + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \ ,$$

et pour Γ une courbe fermée et non intersectante de $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 par morceaux, orientée positivement et ne passant pas par $(1,0)$. Discuter les différents cas possibles.

Réponse : On note int(Γ) pour l'intérieur de la courbe Γ

1) Si $(1,0) \notin \text{int}(\Gamma)$, alors P et Q sont de classe C^1 sur l'intérieur de la courbe, et le théorème de Green-Riemann s'applique. On trouve alors $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$, d'où

$$\int_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\text{int}(\Gamma)} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\ .$$

2) Si $(1,0) \in \text{int}(\Gamma)$, on ne peut plus appliquer ce même théorème car ses hypothèses ne sont alors plus vérifiées. Il nous faut donc calculer explicitement cette intégrale. Pour se faire, soit $\rho > 0$ tel que $B((1,0),\rho) \subset \text{int}(\Gamma)$. Autrement dit, on considère une boule de centre $(1,0)$ et de rayon suffisamment petit pour être contenue dans int(Γ). Soit

$$\gamma : [0, 2\pi[\, \ni t \mapsto (1+\rho\cos(t), \rho\sin(t)) \in \mathbb{R}^2$$

une paramétrisation du cercle de centre $(1,0)$ et de rayon ρ. On a alors

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\
=\ &\int_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\ .
\end{aligned}$$

Or les deux premières intégrales correspondent à des intégrales curvilignes sur le bord de la couronne entre Γ et γ. Or sur ce domaine qui ne contient pas $(1,0)$, les fonctions P et Q sont de classe C^1. On peut donc appliquer le théorème de Green-Riemann sur ce domaine pour obtenir 0. Il reste donc à calculer

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\
=\ &\int_0^{2\pi} \Big[\frac{-\rho\sin(t)}{\rho^2}(-\rho\sin(t)) + \frac{(1+\rho\cos(t))\rho\cos(t) + \rho^2\sin^2(t)}{\rho^2}\rho\cos(t)\Big]\,\mathrm{d}t \\
=\ &\frac{1}{\rho^2}\int_0^{2\pi} \Big[\rho^2\sin^2(t) + \rho^2\cos^2(t) + \rho^3\cos(t)\Big]\,\mathrm{d}t \\
=\ &2\pi\ .
\end{aligned}$$

On remarque que ce résultat est indépendant de ρ, mais également de la courbe Γ. La seule chose qui a compté est le fait que $(1,0) \in \text{int}(\Gamma)$.

Exercice 6 (Entraînement).
Soit Γ une courbe fermée et non intersectante dans $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 dont le domaine intérieur D est symétrique par rapport à $(0,0)$, c'est-à-dire $(x,y) \in D$ si et seulement si $(-x,-y) \in D$. Démontrer que

$$\int_\Gamma (\cos(xy) + x^3y + e^y)\,\mathrm{d}x + (xe^y + xy^3)\,\mathrm{d}y = 0\ .$$

Réponse : Soit $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $P(x,y) = \cos(xy) + x^3y + e^y$ et $Q(x,y) = xe^y + xy^3$. Ces deux applications étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on peut appliquer le théorème de Green-Riemann pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y) &= \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D (y^3 - x^3 + x\sin(xy))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ := I.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $u = -x$ et $v = -y$, de jacobien égal à 1, et en utilisant la symétrie de D pour remarquer que le domaine d'intégration demeure inchangé dans les nouvelles variables, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D ((-v)^3 - (-u)^3 - u\sin(uv))\,\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\ &= -\iint_D (v^3 - u^3 + u\sin(uv))\,\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\ &= -I\ , \end{aligned}$$

car le nom de la variable d'intégration n'a pas d'importance. On a ainsi obtenu que $I = -I$, ce qui ne peut être vrai que si $I = 0$.

Exercice 7 (Entraînement).
Calculer le volume du domaine D défini par l'intersection d'une sphère de rayon $R > 0$ et d'un cylindre de révolution de rayon $R' > 0$, avec $R' < R$, ayant pour axe un diamètre de la sphère.

Réponse : En plaçant le centre de la sphère à l'origine et le cylindre vertical, avec son axe confondu avec l'axe $0z$, on obtient :

$$\text{Intersection } = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq R'^2\Big\},$$

ce qui donne en coordonnées cylindriques (dont le Jacobien est r) :

$$\Big\{(r, \theta, z) \mid r \in [0, R'],\ \theta \in [0, 2\pi[\text{ et } z \text{ vérifie } r^2 + z^2 \leq R^2\Big\}.$$

Le volume V de cette intersection est alors donné par

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\text{Int}} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R'} \mathrm{d}r \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\ \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^{R'} 2r(R^2 - r^2)^{1/2}\ \mathrm{d}r \\ &= \frac{4\pi}{3}\Big[R^3 - (R^2 - R'^2)^{3/2}\Big]\ . \end{aligned}$$

On remarque finalement que si $R' = R$, on trouve $V = \frac{4\pi}{3}R^3$, ce qui est bien le volume de la sphère, car l'intersection du cylindre et de la sphère est bien la sphère dans ce cas précis.