Math IV, analyse (L2) – Fiche 12

27 mai 2008

Exercice 1.
On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$g(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{1 - x^2 - y} \ .$$

1. Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté D, sur lequel g est bien définie. Représenter graphiquement cet ensemble.
2. On note par Γ la frontière de D. Calculer
$$\min_{(x,y)\in\Gamma} g(x,y) \qquad \text{et} \qquad \max_{(x,y)\in\Gamma} g(x,y) \ ,$$
et déterminer en quel point (x,y) de Γ ces valeurs sont atteintes.
3. Trouver les points critiques de g à l'intérieur de D, et déterminer la valeur de g en ces points.
4. En déduire la valeur minimale et la valeur maximale de g sur D.
5. Déterminer le développement de Taylor de g à l'ordre 1 au voisinage du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Réponse : 1) Il y a deux conditions à satisfaire : $y - x^2 \geq 0$ et $1 - x^2 - y \geq 0$. Ainsi, le domaine de l'application g est

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq 0 \text{ et } 1 - x^2 - y \geq 0\} \ .$$

2) Il y a deux façons de décrire la frontière Γ. La première donne une réponse un peu plus longue :

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \text{ et } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \bigcup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - x^2 \text{ et } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \ .$$

Ainsi, sur la frontière, g se réduit en une application d'une seule variable quelle que soit la parabole :

$$h(x) = g(x, x^2) = g(x, 1 - x^2) = \sqrt{1 - 2x^2} \ .$$

La dérivée de $h(x)$ est

$$h'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - 2x^2}} \ ,$$

et s'annule si et seulement si $x = 0$. A cette valeur de x correspondent deux points sur la frontière : $(0,0)$ et $(0,1)$. Comme x décrit un intervalle borné et fermé, pour compléter la liste des points où g peut atteindre ses valeurs extrémales sur Γ, il suffit d'y ajouter $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

Les valeurs extrémales et les points où elles sont atteintes découlent immédiatement de la liste suivante : $g(0,0) = 1$, $g(0,1) = 1$ et $g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = 0$.

La deuxième possibilité d'étude se base sur

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\right\} \bigcup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - x^2 \text{ et } \frac{1}{2} \leq y \leq 1\right\} \ .$$

Sur le premier ensemble $g(x,y) = g_1(y) = \sqrt{1-2y}$ tandis que sur le deuxième $g(x,y) = g_2(y) = \sqrt{2y-1}$. Sur l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, g_1 atteint son maximum et son minimum aux valeurs 0 et $\frac{1}{2}$ respectivement puisque g_1 est décroissante. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, g_2 atteint son minimum et son maximum aux valeurs $\frac{1}{2}$ et 1 respectivement parce que g_2 est croissante. Les valeurs extrémales de g et les points correspondants sont bien sûr les mêmes que ceux déterminés dans la première réponse.

3) Le calcul des dérivées partielles fournit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= -x\left(\frac{1}{\sqrt{y-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y}}\right) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{y-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y}}\right) \quad . \end{aligned}$$

La dérivée par rapport à la première variable s'annule si et seulement si $x = 0$. Dans ce cas, la dérivée par rapport à la deuxième variable s'annule si et seulement si $\sqrt{y} = \sqrt{1-y}$. L'application racine $t \mapsto \sqrt{t}$ étant bijective, ceci équivaut à $y = 1-y$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{2}$. En ce point, g atteint la valeur $\sqrt{2}$.

4) La valeur minimale de g sur D, évidente dès le début, est 0. Les deux points précédents montrent que la valeur maximale de g sur D est $\sqrt{2}$.

5) Il y a deux façons équivalentes de donner ce résultat. Nous présentons les deux. Soit on suppose h, k proches de 0 et on a :

$$\begin{aligned} g\Big(\frac{1}{2}+h, \frac{1}{2}+k\Big) &= g\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) + \Big[\frac{\partial g}{\partial x}\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\Big]h + \Big[\frac{\partial g}{\partial y}\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\Big]k + o(||(h,k)||) \\ &= 1 - 2h + o(||(h,k)||) \ . \end{aligned}$$

Soit on suppose x, y proches de $\frac{1}{2}$ et on a :

$$\begin{aligned} g(x,y) &= g\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) + \Big[\frac{\partial g}{\partial x}\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\Big]\Big(x-\frac{1}{2}\Big) + \Big[\frac{\partial g}{\partial y}\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\Big]\Big(y-\frac{1}{2}\Big) + o\Big(\Big|\Big|\Big(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\Big)\Big|\Big|\Big) \\ &= 1 - 2\Big(x-\frac{1}{2}\Big) + o\Big(\Big|\Big|\Big(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\Big)\Big|\Big|\Big) \ . \end{aligned}$$

Exercice 2.
Soit l'ensemble

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

1. Dessiner D.
2. Soit C l'ensemble des points du bord de D. Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe C en un point $(x_0, y_0) \in C$, en supposant $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.
3. Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

   (a) en utilisant le changement de variables : $\left\{\begin{array}{l} x = 2r\cos(\theta) \\ y = 3r\sin(\theta) \ ; \end{array}\right.$

(b) en utilisant la formule de Green-Riemann.

Réponse : 1) Le domain correspond à un quart d'ellipse (intérieur compris), de demi-axes 2 et 3, et contenu dans le premier quadrant.

2) Pour $t \in]0, \pi/2[$, soit $t \to \left\{ \begin{array}{l} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 3\sin(t) \end{array} \right.$ la paramétrisation du quart de l'ellipse contenu dans le premier quadrant, c'est-à-dire l'ensemble des points vérifiant l'équation $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ et satisfaisant $x, y > 0$. Soit $t_0 \in]0, \pi/2[$ la valeur de t tel que $x_0 = 2\cos(t_0)$ et $y_0 = 3\sin(t_0)$. La droite tangente à la courbe C en ce point (x_0, y_0) est une droite parallèle à la direction du vecteur tangent donné par :

$$(x'(t_0), y'(t_0)) = (-2\sin(t_0), 3\cos(t_0)) = \Big(-\frac{2}{3}y_0, \frac{3}{2}x_0\Big).$$

Par conséquent, l'équation de cette droite est

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\frac{x - x_0}{y_0} = \frac{2}{3}\frac{y - y_0}{x_0}.$$

Une autre façon de trouver l'équation de la droite tangente à une courbe définie par une équation $F(x, y) = 0$ se base sur le fait que le gradient de la fonction F est perpendiculaire à la direction tangente. Dans notre cas $F(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1$, et $\nabla F(x_0, y_0) = (\frac{2}{4}x_0, \frac{2}{9}y_0)$. Or, une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $(x - x_0, y - y_0)$ soit perpendiculaire à $\nabla F(x_0, y_0)$ est que leur produit scalaire soit nul, ce qui donne l'équation de la droite tangente :

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot \Big(\frac{2}{4}x_0, \frac{2}{9}y_0\Big) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - x_0)x_0 + \frac{2}{9}(y - y_0)y_0 = 0.$$

3) Le Jacobien du changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} x = 2r\cos(\theta) \\ y = 3r\sin(\theta) \end{array} \right.$ est

$$\det \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -2r\sin(\theta) \\ 3\sin(\theta) & 3r\cos(\theta) \end{pmatrix} = 6r,$$

et ainsi $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 6r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$. Les bornes des nouvelles variables sont $0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2$. L'intégrale devient alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (2r\cos(\theta) - 3r\sin(\theta))\ 6r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \\ = \quad & \int_0^1 12r^2\ \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta - \int_0^1 18r^2\ \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta \\ = \quad & -2. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green-Riemann :

$$\int_C P(x, y)\ \mathrm{d}x + Q(x, y)\ \mathrm{d}y = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\Big)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Alors on cherche $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ tel que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = x - y$. Il y a une infinité de possibilités. Par exemple, nous pouvons choisir $P(x, y) = 0$ ce qui definira Q par $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = x - y$

et alors $Q(x,y) = x^2/2 - xy$ fera l'affaire. L'intégrale à calculer sera alors :

$$\int_C (x^2/2 - xy)\,\mathrm{d}y.$$

La courbe C consiste en 3 morceaux $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. On peut les paramétrer par :

$$\gamma_1 : [0,2] \ni t \to \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases},$$

$$\gamma_2 : [0,\pi/2] \ni t \to \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 3\sin(t) \end{cases},$$

$$\gamma_3 : [3,0] \ni t \to \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}.$$

Les parties de l'intégrale sur γ_1 et γ_3 donnent 0. Il reste alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} (x^2/2 - xy)\,\mathrm{d}y &= \int_{\gamma_2} [(2\cos(t))^2/2 - 2\cos(t)\ 3\sin(t)]3\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} [6\cos^3(t) - 18\cos^2(t)\ \sin(t)]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(3t)\,\mathrm{d}t + \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(t)\,\mathrm{d}t - 18\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\ d(-\cos(t)) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 6 \\
&= -2,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $\cos^3(t) = (\frac{e^{it}+e^{-it}}{2})^3 = \frac{1}{4}(\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} + 3\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}) = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)$. Si on veut absolument éviter avoir le $\cos^3(t)$ on n'a qu'à choisir P et Q différemment, par exemple, $P(x,y) = -xy$ et $Q(x,y) = -xy$ ou bien utiliser que $\cos^3(t) = \cos(t) - \sin^2(t)\cos(t)$.

Exercice 3.
Dessiner avec précision la région.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|,|y|) = 2\}.$$

Donner explicitement un arc **dans cette région** qui joint le point $(2,0)$ au point $(-1,2)$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Faites en sorte que l'ensemble de départ de l'arc tout entier soit l'intervalle $[0,1]$ (*Il faudra donc faire un recollement de deux applications dont l'union des domaines est* $[0,1]$).

Réponse : Un exemple d'une telle paramétrisation est la suivante :

$$\gamma : [0,1] \ni\mapsto \begin{cases} (2, 0+4t) & \text{pour } t \in [0,1/2] \\ (2-6(t-1/2), 2) & \text{pour } t \in [1/2,1] \end{cases}.$$