UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 2

3 mars 2008

Exercice 1.
Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites vers le point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(A)\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y); \quad (B)\ \lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)); \quad (C)\ \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)).$$

On considère les applications suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Pour chacun fonction, déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel elle est bien définie, et montrer ensuite sur ces exemples que pour $(a, b) = (0, 0)$:

1. Deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième existe,
2. Une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres existent,
3. (B) et (C) peuvent exister sans être égales,
4. Si (A) et (B) existent alors elles sont égales.

Réponse : Les fonctions f_1 et f_2 sont bien définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f_3 est bien définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ et f_4 est bien définie sur tout $\mathbb{R}^2$.

Calculons maintenant les différentes limites pour chacune de ces fonctions : Pour $y \neq 0$ on a $\lim_{x\to 0} f_1(x,y) = -1$, d'où $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f_1(x,y) = -1$. Pour $x \neq 0$, on a $\lim_{y\to 0} f_1(x,y) = 1$, d'où $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f_1(x,y) = 1$. De façon analogue, pour $y \neq 0$ on a $\lim_{x\to 0} f_2(x,y) = 0$, d'où $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f_2(x,y) = 0$, et pour $x \neq 0$, on a $\lim_{y\to 0} f_2(x,y) = 0$, d'où $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f_2(x,y) = 0$. Remarquons cependant que $\lim_{x\to 0} f_2(x,x) = \frac{1}{2}$. Similairement, pour $y \neq 0$ on a $\lim_{x\to 0} f_3(x,y) = 0$, d'où $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f_3(x,y) = 0$, et pour $x \neq 0$ mais $|x| < \pi$, on a $\lim_{y\to 0} f_3(x,y) = \pm\infty$. Finalement, pour $y \neq 0$ on a $\lim_{x\to 0} f_4(x,y) = \frac{1}{y^2+1}$, d'où $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f_4(x,y) = 1$, et pour $x \neq 0$, on a $\lim_{y\to 0} f_4(x,y) = \frac{1}{x^2+1}$, d'où $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f_4(x,y) = 1$. En passant en coordonnées polaires, on remarque que $|f_4(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leq \frac{1}{1+r^2}$ avec

$$\lim_{r\to 0} |f_4(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| = 1.$$

Pour f_4, on peut également remarquer que cette fonction est le quotient de la fonction $(x, y) \mapsto 1$ et de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 1$ qui admettent des limites pour $(x, y) \to (0, 0)$ (et que cette limite n'est pas 0 pour le dénominateur) et de vérifier que dans une telle situation, la fonction quotient admet une limite en $(0, 0)$ qui n'est rien d'autre que le quotient des limites.

Pour f_2, les limites selon (B) et (C) existent, mais la limite selon (A) n'existe pas. Pour f_3, seul la limite selon (C) existe, les limites selon (A) et (B) n'existent pas. Pour f_1, les limites selon (B) et (C) existent mais ne sont pas égales. La limite selon (A) n'existe donc pas pour cette fonction. Finalement, la limite selon (A) impliquant les deux autre, il est clair que l'existence de la limite selon (A) pour la fonction f_4 implique l'existence et l'égalité des limites selon (B) et (C) pour cette fonction.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$ pour tout $m \in \mathbb{R}$,
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'équation $y = x^2$,
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Réponse : 1) On remarque que pour $m \neq 0$ on a

$$f(x,mx) = \frac{mx}{x^2 - 2mx + 3m^2} ,$$

alors que pour $m = 0$ on a $f(x,mx) = 0$. Ainsi, on trouve que $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = 0$, pour tout $m \in \mathbb{R}$.

2) On a $f(x,x^2) = \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et ainsi $\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1}{2}$.

3) On remarque que la limite de la fonction f en $(0,0)$ obtenue par deux chemins différents n'est pas la même. Cette fonction n'est donc pas continue en $(0,0)$ car elle n'admet pas une limite unique.

Exercice 3.
1. Soient $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma\ \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto \quad \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^\gamma} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Montrer que la fonction f est continue si et seulement si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \gamma$.

Réponse : La réponse à chaque question de ce type contient un passage standard qui sert à vérifier la continuité aux points réguliers. En l'occurrence, un tel passage concerne tout point différent de $(0,0)$. En effet, si $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ il existe un voisinage de (x_0,y_0) sur lequel la fonction est définie par $(x,y) \to \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^\gamma}$. Alors la continuité au point (x_0,y_0) découle de la continuité de la somme, du produit, de la composition des applications, de la projection sur les coordonnées, etc.

Donc il reste à vérifier si f est continue au point $(0,0)$. Avant d'introduire les coordonnées polaires, on pose $u = |x|^{\frac{\beta_1}{2}}$ et $v = |y|^{\frac{\beta_2}{2}}$. Dans ce cas, on a que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^\gamma} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{|u|^{2\frac{\alpha_1}{\beta_1}}|v|^{2\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{(u^2+v^2)^\gamma} , \tag{1}$$

cette égalité signifiant que si une des limites existe, alors l'autre également existe et qu'elles sont égales, et que dans le cas contraire, si l'une existe pas, l'autre n'existe pas non plus. Le passage aux coordonnées polaires en posant $u = \rho\cos\theta$ et $v = \rho\sin\theta$ donne alors

$$f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) := \frac{\rho^{2(\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2})}(\cos^{2\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\theta \sin^{2\frac{\alpha_2}{\beta_2}}\theta)}{\rho^{2\gamma}} ,$$

et comme ci-dessus, on a que (1) est égale à $\lim_{r\to 0} f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))$. Remarquer maintenant que $|f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))| \leq \rho^{2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}-\gamma\right)} \to 0$ pour $\rho \to 0$ si

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}-\gamma > 0. \tag{2}$$

Si $\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\gamma$, alors $f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))$ ne dépend pas de ρ mais dépend de θ, et n'a donc pas de limite indépendante de θ quand $\rho \to 0$. Remarquer que dans le cas $\alpha_1=\alpha_2=0$, cette limite serait indépendante de θ, mais que l'on ne peut alors avoir $\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\gamma$ car on a supposé $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Finalement, si $\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}-\gamma<0$, alors $f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))$ tend vers $+\infty$ pour $\rho \to 0$ (sauf pour quelques valeurs particulières de θ pour lesquelles la limite est nulle). Ainsi, seulement dans le cas (2), la fonction admet une limite en $(0,0)$ et devient continue en ce point.

2. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{e^{x^2y}-1}{xy} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ x & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} (x^2+3x+2)\sin(\pi/y) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases} \end{array}$$

Réponse : Soit (x_0,y_0) un point fixé de $\mathbb{R}^2$. Si (x_0,y_0) n'est pas sur l'un des axes, la continuité est vérifiée en (x_0,y_0) en utilisant les résultats généraux du cours. Si $x_0y_0=0$, on va considérer des points (x,y) dans un voisinage de (x_0,y_0). Remarquez alors $(x,y)\to(x_0,y_0)$ implique non seulement que $xy \to x_0y_0=0$ mais également que $x^2y \to x_0^2y_0=0$. En conséquence, on peut appliquer les développements limités et conclure

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{e^{x^2y}-1}{xy} &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{e^{x^2y}-1}{x^2y}x\right) \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\lim_{x\to x_0} x \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1+u+o(u)-1}{u} \quad x_0 \\ &= x_0 \end{aligned}$$

<u>Remarque :</u> Attention à ne pas croire à l'affirmation suivante : $xy \to 0 \Rightarrow x^2y \to 0$. En effet, si $y=\frac{1}{1+|x|^\alpha}$ avec $\alpha \in]1,2[$ on a $xy \to 0$ pour $x \to +\infty$, mais $x^2y \to +\infty$ pour $x \to +\infty$.

En ce qui concerne la deuxième application, les points qui nécessitent une approche particulière sont ceux où la deuxième coordonnée s'annulle. Autour d'un tel point, disons $(\alpha,0)$, si α est une racine du polynôme x^2+3x+2 on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,0)}\left|(x^2+3x+2)\sin\left(\frac{\pi}{y}\right)\right| \leq \lim_{(x,y)\to(\alpha,0)}|x^2+3x+2|=0$$

si on évite les points de la forme $(x,0)$ au voisinage de $(\alpha,0)$. Si on est sur un point de la forme $(x,0)$, alors la valeur de la fonction est toujours 0. Donc la limite est 0. Cette conclusion entraîne la continuité aux points $(-1,0)$ et $(-2,0)$.

Si α n'est pas une racine du polynôme, alors la limite dépend de la valeur de $\sin(\pi/y)$ au voisinage de $(\alpha,0)$ et celle-ci ne peut pas être controlée. Posez par exemple, $y=\frac{2}{2k+1}$, $(k\in\mathbb{N})$.

Exercice 4.

1. Etudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

2. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour $(x,y) \to (0,0)$ et (x,y) appartenant à l'ensemble de définition :

$$f(x,y) = \frac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{y\ln(y-x^2)}, \qquad f(x,y) = x^y.$$

Réponse : 1) On effectue un changement de variable en posant $u(x,y) = xy$. Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$, les développements limités (ou les équivalents) au voisinage de 0 nous permettent de conclure :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1.$$

2) En utilisant les coordonnées polaires on trouve :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|} = 0$$

En effet soient $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Alors

$$|f(x,y)| = \frac{r^{7/3}}{r^2 + r|\cos\theta - \sin\theta|} \le r^{1/3}.$$

Or $\lim_{r\to 0} r^{1/3} = 0$, d'où l'on conclut que la limite de la fonction en $(0,0)$ existe et vaut 0. Une autre approche est de considérer les inégalités suivantes :

$$\left|\frac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|}\right| \le \frac{|x|^{1/3}y^2}{y^2} \le |x|^{1/3}$$

et de conclure de la même façon qu'auparavent.

Pour la deuxième fonction il est crucial de constater qu'en raison de la fonction logarithme $y > x^2$. Alors, quand on passe aux limites des valeurs absolues, on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y|\ln(y-x^2)|} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{|\ln(y-x^2)|} = 0.$$

Finalement, pour la fonction $f(x,y) = x^y$, l'approche la plus efficace est de comparer

$$\lim_{x\to 0^+} (\lim_{y\to 0^+} x^y) = 1$$

à la limite

$$\lim_{y\to 0^+} (\lim_{x\to 0^+} x^y) = 0.$$

On constate donc que la limite en $(0,0)$ n'existe pas puisqu'en arrivant par deux chemins différents, on obtient deux limites différentes.

Exercice 5 (Entraînement).

Calculer les limites quand $||(x,y)|| \to +\infty$ des fonctions suivantes (*le choix de la norme n'est pas précisé puisqu'elles sont toutes équivalentes sur* $\mathbb{R}^2$).

$$f(x,y) = \frac{x\arctan y}{x^2+y^2+1}, \qquad g(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}, \qquad h(x,y) = (1+|x|+|y|)\sin(y^2).$$

Réponse : Contentons-nous des réponses, le travail pour les obtenir étant un entraînement facile : 0, pas de limite, pas de limite.