UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 3

10 mars 2008

Exercice 1 (Retour à la première fiche).
Vous avez déjà rencontré les ensembles suivants lors de votre périple. C'est une nouvelle rencontre. Comme chaque nouvelle rencontre, elle peut éventuellement apporter ses fruits. Essayez de voir si vous pouvez appliquer vos connaissances maintenant plus avancées sur les applications continues, pour vérifier avec moins de calcul si ces sont ensembles sont ouverts, s'ils sont fermés, et pour déterminer leur intérieur, leur adhérence et leur frontière.

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1 \textit{ et } (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{16}\}$,
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$,
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{4n^2}\}$.

Réponse : Nous nous contentons de vous guider légèrement puisque vous avez déjà été suffisamment instruits pendant les séances de travaux dirigés. Vérifions rigoureusement que l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$$

est ouvert. Voici la réponse qui était donnée dans le premier corrigé :
"L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$ est ouvert car il est l'intersection des trois ouverts suivants : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < 1\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y|\}$. "
Vous pouvez vérifier que chacun de ces trois ensembles est ouvert en utilisant des applications continues. Pour le premier, $\pi : (x,y) \mapsto x$, pour le deuxième, $f : (x,y) \mapsto |y|$ et pour le troisième, $g : (x,y) \mapsto |x| - |y|$ conviennent. Les ensembles sont $\pi^{-1}(]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, 1[)$ et $g^{-1}(]-\infty, 0[)$ respectivement.

Vous pouvez partiellement faire usage des applications continues pour déterminer l'adhérence de E. En effet, les mêmes applications permettent de conclure que $\overline{E} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| \leq |y| \leq 1\}$. De là, pour arriver à une égalité, il faudra faire un peu de calcul.

Exercice 2.
Déterminer si les ensembles suivants sont compacts, connexes par arc :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$$

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - 4)(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \leq 0\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \textit{ et } xy \leq 1\}$$

Réponse :

A. Les parties compactes de $\mathbb{R}^p$ sont caractérisées comme celles qui sont fermées et bornées. (*Attention : cette caractérisation n'est pas vraie pour des espaces vectoriels normés en général !*). Nous nous servirons de cette caractérisation pour conclure rapidement que A n'est pas compact. En effet,

A ne contient aucun point de sa frontière. N'étant pas fermé A n'est pas compact non plus. Notons que A est quand-même borné.

Pour répondre à la question sur la connexité, nous nous servirons du théorème des valeurs intermédiaires. En effet, si A était connexe par arcs, alors il exiterait en particulier un arc pour se déplacer du quart de A dans le premier quart du plan à l'un des trois autres quarts. A titre d'exemple, étudions l'existence d'un tel arc entre le premier et le deuxième quart de plan. Soit

$$\begin{array}{ccccc} \gamma & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array}$$

un arc joignant un point p situé dans le premier quart de A à un point q dans le deuxième quart de A. Composons cette application avec la projection sur la première coordonnée, qu'on notera π_1. Rappelons que celle-ci est l'application suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1 & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1,x_2) & \longmapsto & x_1 \end{array} .$$

Alors $(\pi_1 \circ \gamma)(0) > 0$ et $(\pi_1 \circ \gamma)(1) < 0$. Par hypothèse γ est continue en tous les points de $[0,1]$ tandis qu'en général les projections $\pi_i : (x_1,\ldots,x_p) \longmapsto x_i$ sont des applications continues de $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) vers $\mathbb{R}$. Alors, d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe $t \in [0,1]$ tel que $(\pi_1 \circ \gamma)(t) = 0$. Or, aucun point de A n'est d'abscisse 0. Cette contradiction montre qu'il n'y a pas d'arc dans l'ensemble A de p vers q

B. Nous continuerons de nous servir de la caractérisation de la compacité dans $\mathbb{R}^p$. Nous tenons à souligner que dans d'autres espaces normés ce ne serait pas possible.

Vérifions d'abord que B est un ensemble borné. Pour ce faire il est nécessaire de comprendre la nature des points de l'ensemble B, donc d'étudier quand le signe de l'expression

$$(x^2+y^2+z^2-4)(x^2+y^2+z^2-1)$$

est négatif. Comme c'est un produit de deux facteurs, il est nécessaire et suffisant que ceux-ci soient de signes opposés. Alors un seul cas est possible :

$$x^2+y^2+z^2-4 \leq 0 \quad \text{et} \quad x^2+y^2+z^2-1 \geq 0 .$$

Ainsi, l'ensemble B est celui des points inclus entre la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 2 et la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1. C'est un ensemble borné.

C'est pour vérifier que B est fermé que nous utiliserons une application continue, en l'occurrence la suivante :

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & x^2+y^2+z^2 \end{array}$$

C'est un bon entraînement, quoique un peu fastidieux, de vérifier que f est une application continue.

Alors, $B = f^{-1}([1,4])$. Comme l'intervalle fermé $[1,4]$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$, son image inverse par rapport à l'application continue f est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$. En conséquence B est fermé.

Maintenant procédons à la vérification de la connexité par arcs de l'ensemble B. Intuitivement, il est clair que la réponse sera affirmative. Mais comment se frayer un chemin efficace dans l'univers des équations quadratiques définissant nos sphères ? La réponse passe par l'usage des coordonnées sphériques. En effet, comme

$$B = \{(r\cos(\theta)\sin(\phi)\ ,\ r\sin(\theta)\sin(\phi)\ ,\ r\cos(\phi)) \mid 1 \le r \le 2\ ,\ \theta \in [0, 2\pi[\ ,\ \ \phi \in [0, \pi]\}\ ,$$

la description en coordonnées sphériques de l'ensemble B est très simple :

$$B = \{(r, \theta, \phi) \mid 1 \le r \le 2\ ,\ \theta \in [0, 2\pi[\ , \phi \in [0, \pi]\}\ .$$

Alors, si $a, b \in B$ avec $a = (r_a, \phi_a, \theta_a)$ et $b = (r_b, \phi_b, \theta_b)$, alors on définit l'arc qui consiste en trois déplacements. Le premier est le long du rayon qui correspond à θ fixé à la valeur θ_a et ϕ à la valeur ϕ_a : on fait varier r de r_a vers r_b. Le deuxième déplacement est effectué le long du cercle défini de façon unique par le rayon $r = r_b$ et l'angle $\phi = \phi_a$: on fait varier θ de θ_a à θ_b. Le troisième déplacement est le long du cercle défini par $r = r_b$ et $\theta = \theta_b$: on fait varier ϕ de ϕ_a à ϕ_b. Voici un résumé en mathématiques :

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & [0,3] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \longmapsto & \begin{cases} ((1-t)r_a + tr_b\ ,\ \theta_a\ ,\ \phi_a) & \text{si } t \in [0,1] \\ (r_b\ ,\ (2-t)\theta_a + (t-1)\theta_b\ ,\ \phi_a) & \text{si } t \in [1,2] \\ (r_b\ ,\ \theta_b\ ,\ (3-t)\phi_a + (t-2)\phi_b) & \text{si } t \in [2,3] \end{cases} \end{array}$$

C. L'ensemble C n'est pas borné. Il suffit de considérer les points $(\frac{1}{n}, n) \in C$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ pour remarquer que C n'est pas borné. L'ensemble C ne peut jamais être inclus dans une boule de rayon fixé quelle que soit la norme choisie. Ainsi, nous avons montré que C n'est pas compact, et ce, sans vérifier s'il est fermé. Néanmoins, c'est un bon exercice de vérifier rigoureusement si c'est le cas.

En ce qui concerne, la connexité par arc, nous nous contenterons de donner la réponse et de pointer vers la bonne direction : l'ensemble n'est pas connexe, lisez la preuve pour l'ensemble A.

Exercice 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On note l sa limite. Montrer que l'ensemble $\{u_n \mid n \in N\} \cup \{l\}$ est compact.

Réponse : Nous répondrons à cette question de deux manières différentes. D'abord nous utiliserons la vraie définition de la notion d'ensemble compact, et nous vérifierons que de tout recouvrement par de l'ensemble $\{u_n \mid n \in N\} \cup \{l\}$ par des ouverts, nous pouvons extraire un recouvrement fini. Ensuite, nous vérifierons, sans utiliser la compacité, que l'ensemble $\{u_n \mid n \in N\} \cup \{l\}$ est fermée et bornée. Comme nous sommes dans $\mathbb{R}^p$, cette deuxième vérification est suffisante pour conclure que l'ensemble est compact. Soulignons que les méthodes de preuve utilisées sont au moins aussi importantes que la conclusion de l'exercice.

Pour alléger la notation, appelons C l'ensemble en question. Soit $\mathcal{O} = \{O_i | i \in I\}$ un recouvrement de C par des parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$. En d'autres termes, $\mathcal{O}$ est une famille de parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$, indexée par I telle que

$$C \subset \bigcup_{i \in I} O_i\ .$$

Alors chaque élément de C appartient à un membre de $\mathcal{O}$. Or, tout élément de C est de la forme u_n avec ($n \in \mathbb{N}$) ou égal à l. Donc, nous pouvons remplacer $\mathcal{O}$ par une famille éventuellement plus petite formé par $\{O_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{O_\mathfrak{l}\}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$ et $l \in O_\mathfrak{l}$. Nous montrerons que de ce recouvrement réduit, nous pouvons extraire un recouvrement fini.

D'après la définition d'un ouvert il existe $\epsilon_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon_\mathfrak{l} \in \mathbb{R}_+^*$ pour le point limite l, tels que chaque boule ouverte de rayon ϵ_n (resp. $\epsilon_\mathfrak{l}$) autour des points u_n (resp. l) soit contenue dans l'ouvert O_n correspondant (resp. $O_\mathfrak{l}$). Or, par hypothèse la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $u_n \in B(l, \epsilon_\mathfrak{l}) \subset O_\mathfrak{l}$. Il en découle que

$$C \subset O_0 \cup \ldots \cup O_N \cup O_\mathfrak{l} \ .$$

Nous avons réussi à extraire de $\mathcal{O}$ un recouvrement fini : $\{O_0, \ldots, O_N, O_\mathfrak{l}\}$.

Maintenant nous vérifierons directement que l'ensemble C est fermé et borné. Dans la suite, on notera $B(x, \epsilon)$ pour la boule centre x et de rayon ϵ. Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que $u_n \in B(l, \epsilon)$ pour tout $n \geq N$. Donc

$$C \subset [B(l, \epsilon) \cup \{\cup_{n=0}^{N-1} B(u_n, \epsilon)\}] \ .$$

Ainsi, on a montré que l'ensemble C est contenu dans l'union d'un nombre fini de boules de rayon fini. Ainsi C est borné.

Montrons également que $\mathbb{R}^p \setminus C$ est ouvert, et donc C sera fermé. Soit $x \in \mathbb{R}^p \setminus C$ et posons $\epsilon_1 = \|x - l\|$. Comme $l \in C$ et $x \notin C$, on a $\epsilon_1 > 0$. A cause de la convergence de la suite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ telle que $u_n \in B(l, \frac{\epsilon_1}{2})$ pour tout $n \geq N$. Soit également $\epsilon_2 = \min_{n\in\{0,1,\ldots,N-1\}} \|x - u_n\|$. A nouveau, on a $\|x - u_n\| > 0$ et comme on prend le minimum sur un nombre fini d'éléments, on a $\epsilon_2 > 0$. Finalement, en posant $\epsilon = \frac{1}{2}\min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, on vérifie facilement que $B(x, \epsilon) \cap B(l, \epsilon) = \emptyset$ et que $B(x, \epsilon) \cap B(u_n, \epsilon) = \emptyset$ pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Ainsi $B(x, \epsilon) \cap C = \emptyset$, et donc x admet un voisinage ouvert qui n'intersecte pas C. Comme x est un élément quelconque de $\mathbb{R}^p \setminus C$, on a que $\mathbb{R}^p \setminus C$ est ouvert.

Exercice 4.

1. *Trouver une application continue f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et une partie ouverte $O \subset \mathbb{R}$ telles que $f(O)$ ne soit pas ouverte.*
2. *Trouver une application continue g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et une partie fermée $F \subset \mathbb{R}$ telles que $g(F)$ ne soit pas fermée.*
3. *Trouver une application continue h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et une partie compacte $C \subset \mathbb{R}$ telles que $h^{-1}(C)$ ne soit pas compacte.*

Réponse :

1. Dans ce cas, il est assez facile de trouver des exemples. En effet, toute application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue et *non* bijective est susceptible de vous fournir des exemples. Ajoutons aussi qu'il est nécessaire d'éviter celles qui sont bijectives. Pour concrétiser un peu, il suffit de considérer l'application $x \longmapsto x^2$ et tout intervalle ouvert de centre l'origine.

2. Il faut être un peu plus prudent dans ce cas. Il faut éviter les ensembles fermés qui sont aussi bornés. En effet, si C est un ensemble fermé et borné, la caractérisation des ensembles compacts dans $\mathbb{R}^p$ montre que C est aussi compact. Or, l'image d'un ensemble compact sous l'action d'une application continue est compacte, en particulier fermée.

Un exemple, qui a aussi la vertu de vous obliger à réviser vos connaissances antérieures, est l'application

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & & x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array} .$$

Considérer par exemple l'intervalle $[0,+\infty[$ qui est un ensemble fermé dans $\mathbb{R}$. Or, son image $[0,1[$ ne l'est pas.

Pour les curieux : *Vous pouvez montrer que si X est un espace métrique (voire topologique) avec $E \subset X$ et que f est une application continue de X vers X, alors $f\left(\overline{E}\right) \subset \overline{f(E)}$, $\overline{E}$ étant l'adhérence. L'inclusion n'est pas toujours une égalité et l'application* arctan *est un contrexemple.*

3. Les exemples sont abondants. Pour éviter tout calcul, il suffit de considérer une application constante sur $\mathbb{R}$... quitte à vous rappeler que vous avez déjà démontré que les singletons dans $\mathbb{R}$ sont fermés.

Exercice 5.
On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ pour } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \sin(|xy|) .$$

1. *Tracer les courbes de niveau $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ $g(x,y) = 1$.*
2. *Discuter de la continuité de ces fonctions en $(0,0)$ et calculer les dérivées partielles premières.*
3. *Vérifier si ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$.*

Réponse :

1. Tracer ces jolies courbes de niveau est une activité trop agréable pour en priver nos lecteurs.

2. Commençons avec l'application f. Le point $(0,0)$ est le seul point du plan $\mathbb{R}^2$ dont tout voisinage fait intervenir deux définitions différentes pour l'application f. En conséquence, on ne peut pas utiliser les généralités sur les sommes, produits, composées, etc. Néanmoins, il est clair ce qu'il faut faire, essayer de vérifier si la limite suivante existe et dans lequel cas de calculer cette limite :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} .$$

Vous pouvez vous servir des coordonnées polaires qui transforment la formule de f en tout point autre que $(0,0)$ en

$$r\left(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)\right) .$$

En valeur absolue cette expression est majorée par $2r$. C'est suffisant pour conclure que f est continue en $(0,0)$.

La détermination des dérivées partielles se fait en deux temps aussi. Tout point autre que $(0,0)$ est situé dans un voisinage sur lequel f est définie par la correspondance $(x,y) \longmapsto \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. Alors, en calculant les dérivées par rapport à la première et à la deuxième variable on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2} .$$

Au point $(0,0)$, on utilise la définition de la dérivée partielle, en d'autres termes, les limites suivantes sont étudiées :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \quad ; \quad \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} \ .$$

Or,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \ = \ \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \ = 1 \ .$$

Le raisonnement identique donne la même limite pour la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable. En conséquence, nous avons obtenu deux applications définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \quad ;$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \quad .$$

Maintenant, c'est le tour de g. On vérifie que g est une application continue simplement en remarquant qu'elle est la composition des trois applications continues :

$$\mathbb{R} \ni z \mapsto \sin(z) \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \ni z \mapsto |z| \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto xy \in \mathbb{R} \ .$$

Pour se débarasser rapidement de la valeur absolue, remarquons que le problème peut être divisé en trois cas : $xy < 0$, $xy > 0$ et $xy = 0$. Si $xy < 0$ on a $g(x,y) = -\sin(xy)$ (l'application sinus étant une fonction impaire), si $xy > 0$ on a $g(x,y) = \sin(xy)$ et si $xy = 0$ on a $g(x,y) = 0$.

Les dérivées partielles se calculent alors séparément pour les trois cas considérés. Pour $xy < 0$, on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -y\cos(xy)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -x\cos(xy)$. Pour $xy > 0$, on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$. Dans ces deux régions, les dérivées partielles sont continues, étant à nouveau la composition d'applications continues. Pour $xy = 0$, il faut faire à nouveau une distinction entre les différents cas : $x = 0$ et $y \neq 0$, $x \neq 0$ et $y = 0$, et finalement $x = y = 0$. En utilisant la définition des dérivées partielles dans le premier cas, on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{g(0+\epsilon,y)-g(0,y)}{\epsilon} = \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sin(\epsilon y)}{\epsilon} & \text{si } \epsilon y > 0 \\ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{-\sin(\epsilon y)}{\epsilon} & \text{si } \epsilon y < 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} y & \text{si } \epsilon y > 0 \\ -y & \text{si } \epsilon y < 0 \end{array} \right. \ . \tag{1}$$

Pour y fixé, on remarque que le résultat dépend du signe de ϵ. La dérivée partielle par rapport à x n'existe donc pas en ce point (on pourrait éventuellement définir une dérivée partielle à gauche et une autre à droite, mais cela ne correspond pas à notre définition de la dérivée partielle qui doit être unique). En revanche, remarquons qu'en ce même point :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{g(0,y+\epsilon)-g(0,y)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{0}{\epsilon} = 0 \ .$$

La dérivée partielle par rapport à y existe donc, et $\frac{\partial g}{\partial y}(0,y) = 0$.

Les dérivées partielles dans le cas $x \neq 0$ et $y = 0$ se calculent de la même façon. On obtient alors que $\frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = 0$ et que $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ ne peut pas être défini de façon unique. Le cas où $x = y = 0$ peut soit être calculé de la même façon que les deux cas précédents, soit en remarquant que dans le calcul (1), la limite est unique si $y = 0$. On obtient finalement que $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$ et que $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$.

On remarque que les résultats ci-dessus auraient pu être supputés en considérant les résultats obtenus pour $xy \neq 0$. En effet, pour $y > 0$ on a $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -y$, et $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y$, qui sont deux nombres différents (la notation $\lim_{x\to 0, x<0}$ signifie que l'on regarde la limite quand x tend vers 0 par des valeurs négatives uniquement, alors que $\lim_{x\to 0, x>0}$ signifie que l'on regarde la limite quand x tend vers 0 par des valeurs positives uniquement). Le résultat est le même si on suppose $y < 0$, alors que l'on obtient une égalité si $y = 0$. D'un autre côté, on a quelque soit $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{y\to 0, y<0} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$, et $\lim_{y\to 0, y>0} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$. Un raisonnement similaire pouvait également s'appliquer à $\frac{\partial g}{\partial y}$.

3. En ce qui concerne la continuité des dérivées partielles de f, les deux applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en tout point sauf $(0,0)$. En $(0,0)$, il suffit de tendre vers $(0,0)$ pour la première en suivant l'axe des y, pour la deuxième l'axe des x afin de conclure que ni l'une ni l'autre n'y est continue.

Comme l'application g a un comportement assez singulier le long des axes, il est instructuf de faire une étude plus étendue à propos de le continuité de ses dérivées partielles. Les dérivées partielles sont continues sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$. En revanche, sur les deux axes, privés du point $(0,0)$, une des dérivées partielles ne peut pas être définie, et donc ne peut pas être continue. Il reste à vérifier que les dérivées partielles de g sont continues en $(0,0)$ (et prennent la valeur 0 en ce point) sur un domaine adéquat. En effet pour tout $\epsilon > 0$, on a $|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)| \leq \varepsilon$ et $|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)| \leq \varepsilon$ pour tout (x,y) satisfaisant $\|(x,y)\| \leq \epsilon$ et $xy \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $(x,y) \in B((0,0),\epsilon) \setminus \{(x,y) \mid xy = 0\}$.

Ainsi, le plus grand domaine sur lequel la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ est

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ et } y \neq 0, \text{ ou } y = 0 \text{ et } x \neq 0\}.$$

Exercice 6.

Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ une application continue telle que pour tout $x \in K$, $f(x) \neq x$. Montrer qu'il existe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $d(f(x),x) \geq \epsilon$ pour tout $x \in K$.

Réponse : Dans un premier temps nous montrons que si l'on fixe un point y, alors l'application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) qui associe à chaque point $x \in \mathbb{R}^p$ sa distance $d(x,y)$ au point fixé y est continue. En effet, si $a \in \mathbb{R}^p$, la majoration suivante s'obtient en utilisant l'inégalité traingulaire :

$$|d(x,y) - d(a,y)| \leq d(x,a) \ .$$

Il en résulte que si x tend vers a, alors $d(x,y)$ tend vers $d(a,y)$.

Maintenant, montrons que l'application de $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ qui associe à chaque x la distance $d(f(x),x)$ est continue à tout point de $\mathbb{R}^p$. L'inégalité triangulaire montre que

$$\begin{aligned} |d(f(x),x) - d(f(a),a)| &= |d(f(x),x) - d(f(x),a) + d(f(x),a) - d(f(a),a)| \\ &\leq |d(f(x),x) - d(f(x),a)| + |d(f(x),a) - d(f(a),a)| \\ &\leq d(x,a) + d(f(x),f(a)) \ . \end{aligned}$$

La dernière inégalité s'obtient de la même manière qu'au premier paragraphe. Or, par hypothèse f est une application continue. En conséquence, en appliquant la première conclusion de continuité à l'application $x \longmapsto d(x, f(a))$, nous concluons que quand x tend vers a, $d(x, a) + d(f(x), f(a))$ tend vers 0. Ceci finit la preuve de la continuité.

A ce point, la compacité de K est cruciale. En effet, comme K est compact, g atteint ses bornes sur K. En particulier, il existe $y \in K$ telle que $g(y) \leq g(x)$ pour tout $x \in K$. Or $g(y) = d(f(y), y)$ et $f(y) \neq y$ par hypothèse sur f. Donc $d(f(y), y) \neq 0$ et il suffit de poser $\epsilon = d(f(y), y)$ pour obtenir que $g(x) \geq \epsilon$.