UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 4

17 mars 2008

Différentiabilité en un point

L'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est dite *différentiable* en $a \in \mathbb{R}^n$ si elle satisfait la condition

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - df(a)(h)||}{||h||} = 0$$

où $df(a)$ est la matrice par rapport à la base canonique d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ qui est en fait la matrice jacobienne de f évaluée au point a. Plus précisément

$$df(a) = \left(\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x=a} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Notons que dans cette fiche $m = 1$ et qu'alors les matrices jacobiennes se réduisent à des vecteurs lignes.

Propriétés importantes liées à la différentiabilité en un point

1. Si une application est différentiable en un point, alors elle y est continue. L'énoncé réciproque n'est pas vrai en général.

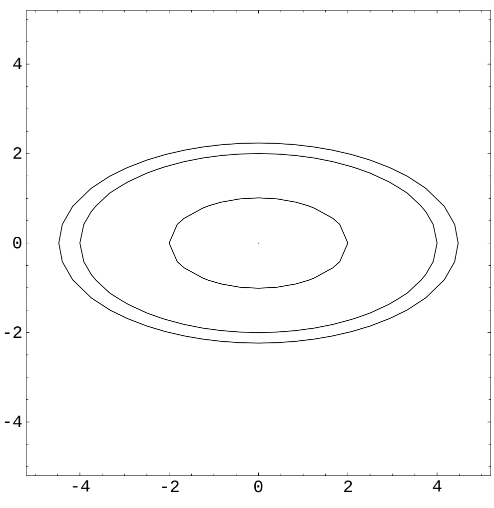
2. Si une application est différentiable en un point, alors toutes ses dérivées directionnelles en ce point existent. L'énoncé réciproque n'est pas vrai en général.

3. Si une application est de classe $\mathcal{C}^1$ en un point, alors elle y est différentiable. L'énoncé réciproque n'est pas vrai en général.

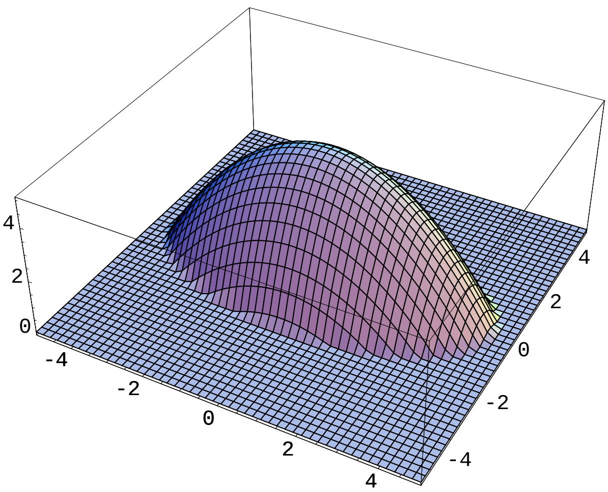
Exercice 1 (Gradient, lignes de niveau).

Soit M un point sur une colline et m la projection de M sur le plan horizontal. En coordonnées cartésiennes, si $M = (x, y, z)$, alors $m = (x, y, 0)$, et la coordonnée z du point M est donnée par la relation $z = f(x, y)$, où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction qui définit l'altitude de chaque point de la colline en fonction de x et y. On suppose que la projection du sommet de la colline a les coordonnées $(0, 0, 0)$, et que f est donnée par $f(x, y) = 5 - \frac{x^2}{4} - y^2$.

1. *Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau L_k pour $k \in \{0, 1, 4, 5\}$.*



2. *Esquisser la surface de la colline pour $z \geq 0$.*



3. *Calculer le gradient de f.*

Réponse : Le gradient est donné par la formule suivante :

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-x}{2}, -2y \right) \ .$$

4. *Trouver la direction de la plus grande pente de f au point $m = (1, 1/2, 0)$. Déterminer le vecteur unitaire correspondant.*

Réponse : Il s'agit de la direction indiquée par le gradient. La ligne de niveau correspondante est $f(x,y) = \frac{9}{2}$. La direction est déterminée par le vecteur obtenu après avoir posé $(x,y) = (1, 1/2)$, donc $\left(\frac{-1}{2}, -1\right)$.

Le vecteur unitaire correspondant est

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + (-1)^2}} \left(\frac{-1}{2}, -1 \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1}{2}, -1 \right) \ .$$

5. *Trouver les directions où la dérivée directionelle au point $m = (1, 1/2, 0)$ est zéro.*

Réponse : Il suffit de calculer un vecteur unitaire et son opposé pour la droite passant par m et perpendiculaire à la direction du vecteur gradient.

Exercice 2 (Gradient, composition).
On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto e^{3x+2y} \in \mathbb{R}$ et on pose $x = x(t) = \cos(t)$ et $y = y(t) = t^2$. Calculer de deux manières différentes la dérivée de la fonction

$$F : \mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) = g(x(t), y(t)),$$

une première fois directement, et une seconde fois comme une dérivée de fonction composée.

Réponse : Cet exercice concerne la composition de deux applications, une première de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ suivie d'une deuxième de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \overset{f}{\longmapsto} & (\cos(t), t^2) & \overset{g}{\longmapsto} & e^{3\cos(t)+2t^2} \end{array} .$$

En raison des ensembles de départ et d'arrivée de la composée de $g \circ f$, la dérivée recherchée peut être déterminée par une simple application de la dérivation par rapport à t avec une légère utilisation de la règle des applications composées en une seule variable. Il est néanmoins très instructif de voir comment les méthodes différentielles générales introduites en cours se spécialisent à ce contexte. Commençons par rappeler la règle générale des applications composées :

$$(*) \qquad \mathrm{d}(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

où f est une application de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$ suivie d'une application g de $\mathbb{R}^q$ vers $\mathbb{R}^r$, $a \in \mathbb{R}^p$ est un point de $\mathbb{R}^p$ tel que f soit différentiable en a et que g soit différentiable en $f(a)$. Soulignons que dans le membre de droite de l'égalité (*), la composition concerne des applications linéaires. Donc tout est représenté, quitte à choisir une base, par deux matrices et leur produit. Il s'agit bien sûr de déterminer les matrices jacobiennes.

Dans notre problème, par rapport aux bases canoniques, $\mathrm{d}f$ est la matrice 2×1 donnée par

$$\mathrm{d}f(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2t \end{pmatrix} ;$$

tandis que $\mathrm{d}g$ est la matrice 1×2 donnée par

$$\mathrm{d}g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{3x+2y} & 2e^{3x+2y} \end{pmatrix} .$$

En suivant la notation de l'égalité générale (*), le point a correspond à t et

$$f(a) = f(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), t^2) .$$

Ainsi, on obtient le produit matriciel suivant :

$$\mathrm{d}(g \circ f)(t) = \mathrm{d}g(f(t))\, \mathrm{d}f(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3\cos(t)+2t^2} & 2e^{3\cos(t)+2t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2t \end{pmatrix} = e^{3\cos(t)+2t^2}\,(-3\sin(t) + 4t) .$$

Notons aussi qu'en général ce produit matriciel n'est qu'une autre forme de la fameuse formule

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g \circ f)(t) &= \mathrm{d}g(f(t))\, \mathrm{d}f(t) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t))\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t))\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) . \end{aligned}$$

Exercice 3 (Jacobien, composition).
Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définies par*

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{(xy)^2 + 1},\, y\left((xy)^2 + 1\right) \right)$$
$$g(x,y) = \left(x\left((xy)^2 + 1\right),\, \frac{y}{(xy)^2 + 1} \right).$$

1. *Calculer les dérivées partielles de f et g là où elles existent.*
2. *Calculer $g \circ f$.*
3. *Vérifier que $f(1,1) = (1/2, 2)$ et trouver le produit des matrices $\mathrm{d}g(1/2,2)$ et $\mathrm{d}f(1,1)$.*

Réponse : Cet exercice suit le même chemin théorique que le précédent. En fait, les deux applications sont inverses et en conséquence la réponse au deuxieme point est l'application identique de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$. Ce qui est plus important est la démarche jacobienne et le contenu du point (3). Le produit recherché dans ce point est en fait un cas particulier du produit de l'égalité générale (*).

Pour détailler, voici les matrices jacobiennes :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-x^2y^2+1}{u^2} & \frac{-2x^3y}{u^2} \\ 2xy^3 & u+2x^2y^2 \end{pmatrix} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u+2x^2y^2 & 2x^3y \\ \frac{-2xy^3}{u^2} & \frac{u-2x^2y^2}{u^2} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, nous avons posé $u = (xy)^2+1$. Les f_i et les g_i sont les applications définissant les coordonnées de f et de g dans leurs ensembles d'arrivées respectifs. Comme $f(1,1) = (1/2, 2)$, le produit matriciel recherché est le différentiel de $g \circ f$ au point $(1,1)$; en d'autres termes :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g\circ f)(1,1) &= \mathrm{d}g(f(1,1))\,\mathrm{d}f(1,1) \\ &= \mathrm{d}g(1/2,2)\,\mathrm{d}f(1,1) \\ &= \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Exercice 4.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*

Réponse : Pour tout point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ il existe un voisinage sur lequel l'application f est définie par l'association $(x,y) \longmapsto \frac{xy^3}{x^4+y^2}$. Alors, les résultats généraux sur la composition d'applications continues suffisent pour conclure que f est continue au point (x_0, y_0).

La continuité au point $(0,0)$ peut se démontrer au moyen de la méthode introduite pour résoudre l'exercice 3 de la fiche 2. L'objectif est de transformer le dénominateur en une somme de carrés pour pouvoir utiliser les coordonnées polaires effectivement. On pose alors $u = x^2$ et $v = |y|$, et quand $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$|f(x,y)| = \frac{|x||y|^3}{x^4 + y^2} = \frac{\sqrt{u}\ v^3}{u^2 + v^2} \ .$$

Le passage aux coordonnées polaires, en posant $u = r\cos\theta$ et $v = r\sin\theta$, donne alors

$$|f(x,y)| = \frac{r^{7/2}|\cos^{1/2}\theta\ \sin^3\theta|}{r^2} \leq r^{3/2} \ .$$

La continuité en $(0, 0)$ en découle.

Cette même continuité peut également s'obtenir en passant directement en coordonnées polaires. En effet, on a

$$|f(x,y)| = \frac{r^2|\cos\theta\sin^3\theta|}{|r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta|} \ ,$$

d'où l'on doit distinguer deux cas. Si $\sin\theta \neq 0$, on a

$$|f(x,y)| \leq \frac{r^2|\cos\theta\sin^3\theta|}{|\sin^2\theta|} \leq r^2|\cos\theta\sin\theta| \leq r^2 \ .$$

Si $\sin\theta = 0$, on a immédiatement $f(x, y) = 0$. Ainsi on a la majoration $|f(x, y)| \leq r^2$, indépendamment de θ, et la continuité en $(0, 0)$ s'ensuit.

2. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire sa matrice jacobienne.*

Réponse : Comme dans l'étude de la continuité, autour de tout point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, il existe un voisinage sur lequel l'application f est définie à partir de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, sans aucun calcul on conclut que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Les dérivées partielles qu'on calcule suivant les règles que vous connaissez bien sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^3\frac{-3x^4 + y^2}{(x^4 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{3x^5y^2 + xy^4}{(x^4 + y^2)^2} \end{aligned}$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

Il reste à vérifier la continuité des applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en tous les points de $\mathbb{R}^2$. Comme dans la discussion de la continuité de l'application f, le seul point qui nécessite un travail particulier est l'origine. Le travail à faire suit la même méthode que celle du point 1 quitte à considérer des quotients qui s'écrivent comme des sommes de deux termes pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ respectivement. Si vous appliquez, séparément à chacun de ces termes, la méthode utilisée pour la continuité de f en $(0, 0)$, alors vous trouverez que chacun converge à 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, ainsi que leur somme.

Dans le paragraphe précédent, nous avons calculé les limites des $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ quand $(x, y) \to (0, 0)$. A priori, les limites calculées, 0 en l'occurrence, ne sont pas les valeurs de $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ et $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$. Par contre, l'application f est continue partout sur $\mathbb{R}^2$, ainsi que sa restriction aux axes des x et des y. En conséquence, le théorème des accroissements finis appliqué aux fonctions partielles, $t \mapsto f(t, 0)$ et $t \mapsto f(0, t)$ permet de conclure que 0 est aussi la valeur des dérivées partielles au point $(0, 0)$.

(*Pour ce type de raisonnement utilisant le théorème des accroissements finis, si vous pensez que* *vous avez besoin de rappels, une source utile est la page web*

http ://math.univ-lyon1.fr/~ benzoni/AnalyseI.pdf

plus précisément la proposition III.12 à la page 38 des notes que vous y trouverez.)

Au point $(x, y) \neq (0, 0)$ la matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} y^3 \dfrac{-3x^4 + y^2}{(x^4 + y^2)^2} & \dfrac{3x^5 y^2 + xy^4}{(x^4 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$

tandis qu'en $(0, 0)$ elle est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f au point* $(0, 0)$.

Réponse : En utilisant la méthode des coordonnées polaires on montre que f est continue au point $(0, 0)$.

2. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.*

Réponse : Aux points $(x, y) \neq (0, 0)$, f est définie à partir des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ en ces points. Donc il en est de même pour f.

3. *Montrer que f admet en* $(0, 0)$ *des dérivées dans toutes les directions.*

Réponse : Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ une direction fixée. La dérivée de f en $(0, 0)$ dans la direction du vecteur (h, k), si elle existe, est la limite suivante :

$$\begin{aligned} D_{(h,k)} f(0, 0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((0, 0) + t(h, k)) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t(h, k)) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t^3 h^3}{t^3 (h^2 + k^2)} \\ &= \frac{h^3}{h^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Comme $(h, k) \neq (0, 0)$, $\frac{h^3}{h^2+k^2}$ est un nombre réel bien défini, en d'autres termes la limite existe.

4. *Montrer que f n'est pas différentiable en* $(0, 0)$.

Pour montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$, nous montrerons une conclusion plus forte, à savoir que quelle que soit la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$ la limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right|}{||(h,k)||} \tag{1}$$

n'existe pas. En effet supposons que pour un certain couple (α, β), cette limite est nulle. Alors, on a

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right|}{||(h,k)||} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| \frac{h^3}{h^2+k^2} - \alpha h - \beta k \right|}{||(h,k)||} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|(1-\alpha)h^3 - \alpha h k^2 - \beta h^2 k - \beta k^3|}{(h^2+k^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Notez que le choix de la norme est libre puisqu'elles sont toutes équivalentes. Nous avons choisi la norme euclidienne pour simplifier nos calculs. A ce stade des calculs, il suffit de considérer différents chemins aboutissant à $(0,0)$ et de voir quelles conditions sont alors imposées à α et β pour avoir que la limite ci-dessus est nulle. Par exemple, en choisissant $\{(h,0)\}_{h>0}$, la limite sera nulle si et seulement si $\alpha = 1$. D'un autre côté, en choisissant $\{(0,k)\}_{k>0}$, on est amené à poser $\beta = 0$ pour que la limite soit nulle. Il en résulte alors que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \right| = 0$ pour tous chemins possibles, ce qui est clairement faux. Ainsi il n'est pas possible de vérifier l'équation (1) quelque soit le choix du couple (α, β).

Exercice 6 (Entraînement).
Un des objectifs de cet exercice est d'illustrer que la condition d'être de classe $\mathcal{C}^1$ est plus forte que celle d'être différentiable. Nous étudions l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie ci-après :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer que f admet des dérivées partielles à l'origine mais que celles-ci n'y sont **pas** continues.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.