Math IV, analyse (L2) – Fiche 5

31 mars 2008

Exercice 1 (Extréma).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extréma relatifs (locaux) de la fonction f.
2. La fonction f possède-t-elle des extréma absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \le x \le 0,\ y = x + 1\}$$

et déterminer les extréma absolus de la restriction de f à L en précisant en quels points de L ils sont atteints.

Réponse : On commence par déterminer les points stationnaires qui forment la liste des points candidats en lesquels la fonction f peut admettre des extrema locaux. Pour ce faire, il faut résoudre le système d'equation

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

f étant de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, les calculs des dérivées partielles peuvent être faits et l'on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6(x^2 + y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6(x - y)\ .$$

Il en découle que les deux points stationnaires sont $(0, 0)$ et $(-1, -1)$.

La deuxième étape dans la détermination des extrema locaux fait intervenir la matrice hessienne, en d'autres termes les dérivées secondes. La méthode, quoique majoritairement appliquée dans $\mathbb{R}^2$ dans ce cours, est valable pour tout $\mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Vous l'avez déjà maitrisée dans le cas des fonctions à une seule variable. En effet, quand $p = 1$, les points stationnaires sont exactement ceux où la dérivée première s'annule. Pour vérifier s'il s'agit d'un extremum, la méthode correspondant à ce que nous avons entrepris dans $\mathbb{R}^2$ est d'étudier la dérivée seconde. Si celle-ci est strictement positive, alors il s'agit d'un minimum local, tandis que dans le cas contraire, c'est un maximum local. Quand la dérivée seconde s'annule, le test est inconclusif. Il peut s'agir d'un point d'inflexion, d'un extremum ou la fonction peut être constante au voisinage du point donné.

Plus généralement, on calcule toutes les dérivées secondes par rapport à toutes les variables en considérant toutes les combinaisons possibles de celles-ci. On construit la matrice hessienne à partir de l'evaluation de ces expressions au point stationnaire fixé. C'est une matrice symétrique qui en fait correspond à une forme quadratique. D'après les résultats sur les matrices symétriques que vous étudiez en Math IV algèbre, une telle matrice est diagonalisable avec des valeurs propres réelles. Si ces valeurs propres sont toutes strictement positives alors il s'agit d'un minimum local. Si elles sont toutes strictement négatives, alors le point stationnaire fixé fournit un maximum. Si les valeurs propres sont non nulles mais de signe mixte, alors il s'agit d'un point selle. En d'autres termes, si le graphe de l'application est coupé le long des sous-espaces propres correspondant aux valeurs positives, alors on obtient des minima locaux au point considéré, s'il est coupé le long des sous-espaces propres correspondant aux valeurs négatives, on obtient des maxima locaux. En particulier, l'application n'admet pas d'extrema en ce point. Finalement, si la matrice hessienne a des valeurs propres nulles, alors il faut étudier l'application avec des méthodes particulières. Pour ce dernier cas, étudiez comme entraînement les applications $f(x, y) = x^2 + y$ et $f(x, y) = x^3 + y$ au voisinage du point $(0, 0)$.

Dans notre exercice, les dérivées secondes sont les suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & 12x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & -6 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & = & 6 \end{array}$$

Les matrices hessiennes pour $(0, 0)$ et $(-1, -1)$ sont respectivement les suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

En général les valeurs propres sont déterminées en calculant le polynôme caractéristique mais dans $\mathbb{R}^2$, ce calcul n'est pas nécessaire pour déterminer leurs signes. En effet, le déterminant de la matrice hessienne est égal au produit des valeurs propres. Donc si le déterminant est strictement négatif, le point considéré n'est pas un extremum mais un point selle. En revanche, si le déterminant est strictement positif, alors le point considéré est un extremum. Pour savoir si les deux valeurs propres sont positives ou négatives, il suffit alors de calculer la trace de la matrice (somme des éléments diagonaux). En effet, la trace correspond à la somme des valeurs propres, et donc si la trace est positive, les deux valeurs propres sont positives et l'on a donc affaire à un minimum local, alors que si la trace est négative, les deux valeurs propres sont négatives et l'on a affaire à un maximum local. Finalement, si le déterminant est nul, alors... il faut travailler davantage.

Dans notre exercice particulier, suivant la recette des paragraphes précédents, on conclut que $(0, 0)$ est un point selle tandis que $(-1, -1)$ est un maximum local.

Le seul candidat est le maximum local $(-1, -1)$, mais on a $f(-1, -1) = 3$ et $f(1, 0) = 4$, donc il n'y a pas des extréma absolus.

2. *La fonction f possède-t-elle des extréma absolus sur* $\mathbb{R}^2$?

Réponse : Pour déterminer les extrema absolus, il faut connaître les valeurs prises par f sur le bord de son domaine en d'autres termes sur le "bord" de $\mathbb{R}^2$, donc à l'infini. Or,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x, 0) = \pm\infty \ .$$

Ainsi, f n'admet pas d'extrema absolus. En fait, c'est une application surjective.

3. *Représenter le segment de droite L défini par*

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \leq x \leq 0, \ y = x + 1\}$$

et déterminer les extréma absolus de la restriction de f à L en précisant en quels points de L ils sont atteints.

Réponse : Sur l'ensemble L, l'application f est déterminée par la formule

$$f(x, x+1) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \ .$$

On définit alors l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} f_L & : & [-2,0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & 2x^3 + 3x^2 - 1 \end{array}$$

L'ensemble de départ, qui en est le domaine, de f_L est compact et décrit les abscisses des points de L. En particulier, f_L, qui est continue sur son domaine, y est bornée et y atteint ses bornes. Pour déterminer ces bornes et les points où elles sont atteintes, il faut étudier les points où $f'_L(x) = 0$ et le bord de L.

Le bord de $[-2, 0]$ est $\{-2, 0\}$. Les solutions de $f'_L(x) = 6x(x + 1) = 0$ sont $x = 0$ et $x = -1$. La dérivée seconde $f''_L(x) = 12x + 6$. On obtient alors $f''(0) = 6$ et $f''(-1) = -6$. En conséquence, les valeurs pertinentes de f_L sont $f_L(-2) = -5$, $f_L(-1) = 0$, $f_L(0) = -1$. Ainsi, 0 et -5 sont les maximum et minimum respectivement.

Exercice 2 (Extréma globaux).
On considère la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \ .$$

1. *Etudier les extréma relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. On pourra utiliser les symétries de la fonction f pour réduire le nombre de cas à étudier.*

Réponse : f étant de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, on peut calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour obtenir en un point donné (x, y) les expressions suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1 - y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \ .$$

Les points stationnaires sont alors

$$(0, 0), \quad (1, 1), \quad (1, -1), \quad (-1, 1), \quad (-1, -1) \ .$$

Or, $f(-x, -y) = f(x, y)$ et $f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y)$. Ainsi, il suffit d'étudier les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Les calculs des dérivées partielles secondes au point (x, y) donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (x^3y - 3xy)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= (x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= (xy^3 - 3xy)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

Les matrices hessiennes aux points $(0,0)$ et $(1,1)$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$$

En conséquence, $(0,0)$ est un point selle tandis que $(1,1)$ est un maximum local. Pour finir, les symétries de f suffisent, sans calcul, pour conclure que $(-1,-1)$ est un maximum local et que $(1,-1)$ et $(-1,1)$ sont des minima locaux.

2. *Démontrer que $f(x,y) \to 0$ quand $\|(x,y)\| \to \infty$.*

Réponse : Remarquons qu'en coordonnées polaires

$$|f(r,\theta)| = |r^2 \ \cos(\theta) \ \sin(\theta) \ e^{-\frac{1}{2}r^2}| \leq r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2} \ .$$

Or

$$\lim_{r\to+\infty} r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2} = 0 \ .$$

Donc,

$$\lim_{||(x,y)||\to+\infty} |f(x,y)| = 0 \ .$$

3. *Déduire de ce qui précède l'existence des extréma globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.*

Réponse :

Comme $f(x,y) \to 0$ quand $\|(x,y)\| \to \infty$, l'application f est borné sur $\|(x,y)\| > R$ pour un certain R, mais pour $\|(x,y)\| \leq R$, une fonction continue sur un ensemble compact est aussi borné. Donc, $f(x,y)$ est borné sur $\mathbb{R}^2$.

En conséquence, les extrema locaux calculés précédemment sont globaux et $f(\mathbb{R}^2) = [-e^{-1}, e^{-1}]$.

Exercice 3 (Multiplicateurs de Lagrange, inégalité).

1. *Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $D = \{(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid x_1 + \ldots + x_n = s\}$. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \ldots x_n$. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver la valeur maximale atteinte par f sur l'ensemble D.*

Réponse :

On obtient les équations suivantes pour les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial (x_1 + \cdots + x_n)}{\partial x_i}$$

pour chaque $i \in \{1,\cdots,n\}$, et après multiplication par x_i on obtient $x_1 \ldots x_n = x_i\lambda$. Donc, $x_1\lambda = x_2\lambda = \cdots = x_n\lambda$. Si $\lambda \neq 0$, on obtient $x_1 = x_2 = \ldots x_n = \frac{s}{n}$ avec produit s^n/n^n. Si $\lambda = 0$ alors $x_i = 0$ pour un ou plusieurs i, ce qui ne convient pas car $x_i > 0$ par hypothèse.

On remarque également que la valeur maximale de f n'est pas atteinte sur le bord de D. En effet, le bord de D est composé par les intersections de l'hyperplan supportant D avec les hyperplans P_i définis par $\{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_i = 0\}$, pour $i \in \{1,\ldots,n\}$. Or sur chacun de ces hyperplans, on a $x_1 \ldots x_n = 0$, donc la fonction f tend vers la valeur 0 pour $(x_1,\ldots,x_n) \to P_i$. Autrement dit, en prolongeant f sur $\mathbb{R}_+^n$, on aurait $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$ pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in P_i$.

Ainsi, la solution est celle avec $\lambda \neq 0$, et donc le maximum de s^n/n^n est atteint uniquement pour $x_1\lambda = x_2\lambda = \ldots x_n\lambda$.

2. *En déduire que, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'inégalité :* $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Réponse :

On obtient immédiatement $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq s/n = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Exercice 4 (Formule de Taylor).
1. *Déterminer les séries de Taylor des fonctions* $(x, y) \mapsto e^{x^2+xy+y^2}$ *et* $(x, y) \mapsto e^{-x^2-xy-y^2}$ *au point* $(0, 0)$ *jusqu'au degré 2. Multiplier les deux polynômes obtenus et expliquer la structure du résultat.*
Réponse :

Comme le développement dans une série entière est unique si la série converge (parce qu'on peut récupérer les coefficients avec les dérivées), on peut utiliser le développement de e^t au point $t = 0$ et la composition des fonctions.

On obtient

$$\begin{aligned} e^{x^2+xy+y^2} &= 1 + (x^2 + xy + y^2) + (x^2 + xy + y^2)^2/2! + o(|x^2 + xy + y^2|^2) \\ &= 1 + (x^2 + xy + y^2) + o(|x^2 + xy + y^2|^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{-x^2-xy-y^2} &= 1 - (x^2 + xy + y^2) + (x^2 + xy + y^2)^2/2! + o(|x^2 + xy + y^2|^2) \\ &= 1 - (x^2 + xy + y^2) + o(|x^2 + xy + y^2|^2) \end{aligned}$$

Le produit de ces deux fonctions donne

$$\begin{aligned} & e^{x^2+xy+y^2}\, e^{-x^2-xy-y^2} \\ = \quad & \left[1 + (x^2 + xy + y^2) + o(|x^2 + xy + y^2|^2)\right]\left[1 - (x^2 + xy + y^2) + o(|x^2 + xy + y^2|^2)\right] \\ = \quad & 1 + o(|x^2 + xy + y^2|^2) \end{aligned}$$

Il s'agit donc de 1 plus des termes de degré plus grand que 2.

2. *Trouver la série de Taylor de* $(x, y) \mapsto e^{x+y}$ *au point* $(0, 0)$ *jusqu'au degré 2. Si l'on substitue* $x = y = 1/2$ *dans le polynôme obtenu, qu'est-ce qu'on peut dire sur le nombre e ?*

Réponse :

Toutes les dérivées partielles de e^{x+y} sont égales à e^{x+y}. Donc la série de Taylor au point $(0, 0)$ commence avec $1+x/1!+y/1!+(x^2+2xy+y^2)/2!$ plus des termes d'ordre supérieur (appelés le reste). La valeur absolue du reste pour la valeur $(x, y) = (1/2, 1/2)$ de la série est majoré par le maximum du terme d'ordre 3 sur l'ensemble $(t/2, t/2)$ avec $t \in [0, 1]$, évidemment $e^{1/2+1/2} = e$. Ainsi, on obtient $e = e^{1/2+1/2} = 1+1/2+1/2+(1/4+2/4+1/4)/2! \pm e(1/8+3/8+3/8+1/8)/3! = 2.5 \pm e/6$ et donc $\frac{15}{7} \leq e \leq 3$.

3. *Reprendre le point 1) en explicitant les séries de Taylor jusqu'au degré 4, et le point 2) en calculant la série de Taylor jusqu'au degré 3.*

Réponse :

Comme avant, on peut trouver le développement :

$$\begin{aligned}
e^{x^2+xy+y^2} &= 1+(x^2+xy+y^2)+(x^2+xy+y^2)^2/2!+\dots \\
&= 1+(x^2+xy+y^2)+x^4/2+y^4/2+x^3y+xy^3+3/2x^2y^2+\dots \\
e^{-x^2-xy-y^2} &= 1-(x^2+xy+y^2)+(x^2+xy+y^2)^2/2!+\dots \\
&= 1-(x^2+xy+y^2)+x^4/2+y^4/2+x^3y+xy^3+3/2x^2y^2+\dots
\end{aligned}$$

Le produit de ces deux expressions donne $e^{x^2+xy+y^2}\,e^{-x^2-xy-y^2} = 1+\cdots$, où les termes non écrits sont de degré plus grand que 4.

Pour l'autre question, on obtient :

$e = e^{1/2+1/2} = 1+1/2+1/2+(1/4+2/4+1/4)/2!+(1/8+3/8+3/8+1/8)/3! \pm e(1/16+4/16+6/16+4/16+1/16)/4! = 8/3 \pm e/24$ et donc e est entre $\frac{24\cdot 8}{3\cdot 25} = 2.56$ et $\frac{24\cdot 8}{3\cdot 23} = 2.78$.

Exercice 5 (Entraînement).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2+2y^2+x^2y^2-x^4-y^4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1) *Déterminer les extréma locaux de f.*

Réponse : Nous trouvons les points stationnaires avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4x-4x^3+2xy^2 = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4y+2x^2y-4y^3 = 0.
\end{aligned}$$

On trouve que $0 = y(4x-4x^3+2xy^2)-x(4y+2x^2y-4y^3) = 6xy(y-x)(x+y)$. Cette équation donne facilement les solutions $(\pm 1,0),(0,\pm 1),(0,0),(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})$. Comme la fonction f vérifie $f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y) = f(-x,-y) = f(y,x)$, il suffit de regarder les points $(1,0),(0,0),(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Les matrices Hessiennes sont $\left(\begin{smallmatrix}-8 & 0\\ 0 & 6\end{smallmatrix}\right)$ pour $(1,0)$, $\left(\begin{smallmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{smallmatrix}\right)$ pour $(0,0)$ et $\left(\begin{smallmatrix}-36 & 16\\ 16 & -36\end{smallmatrix}\right)$ pour $(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Donc $(\pm 1,0)$ et $(0,\pm 1)$ sont des points de selle, $(0,0)$ est un minimum local (avec valeur 0) est $(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})$ sont maxima locaux avec valeur 4.

2) *Montrer que $f(x,y) \le 2r^2 - \frac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2+y^2$. En déduire que $f(x,y) \le 4$.*

Réponse : Cette inegalité est immédiatement equivalente à $0 \le 3x^4+3y^4-6x^2y^2 = 3(x^2-y^2)^2$, où l'égalité est atteinte pour $x^2=y^2$. Pour la fonction dans une variable $2r^2-\frac{r^4}{4}$, on trouve facilement le maxima pour $r=\pm 2$ avec valeur 4. Donc, la fonction est bornée par 4.

3) *Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.*

Réponse : La borne supérieure 4 est atteinte dans $(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})$, donc c'est le maximum global. Les équations $x^2=y^2$ et $r=2$ donne immédiatement que les points $(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})$ sont les seules solutions.

4) *Y a-t-il un minimum global ?*

Réponse : Non, parce que $f(x,y) \to -\infty$ pour $||(x,y)|| \to \infty$.