UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 6

7 avril 2008

Exercice 1.
Déterminer la borne supérieure de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$

sur le compact $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Réponse : a) On commence par déterminer les points stationnaires, c'est-à-dire les points de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels les deux dérivées partielles s'annulent. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y - 6x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x - 3y^2 \ .$$

Les solutions du système défini par les équations $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ sont $(0, 0)$ et $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. La nature de ces deux points stationnaires peut être obtenue à partir de la connaissance des matrices Hessiennes en ces deux points. Pour ce faire, remarquons que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 3 \ .$$

Les matrices Hessiennes aux points $(0, 0)$ et $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ sont donc respectivement égales à

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} .$$

Soit M une de ces matrices. Rappelons que si M admet deux valeurs propres positives, alors le point de $\mathbb{R}^2$ pour lequel cette matrice est calculée est un minimum local. Au contraire, si la matrice M admet deux valeurs propres négatives, alors le point considéré est un maximum local. Si la matrice admet une valeur propre négative et l'autre valeur propre positive, le point considéré n'est ni un maximum ni un minimum, mais un point selle. Finalement, si une des valeurs propres est nulle, on ne peut pas conclure et un travail supplémentaire est nécessaire.

Pour connaître le signe des valeurs propres, il n'est heureusement pas nécessaire de déterminer exactement ces valeurs. En effet, le déterminant de la matrice M est égal au produit des valeurs propres. Donc si le déterminant est négatif ou nul, le point considéré n'est pas un extremum. En revanche, si le déterminant est strictement positif, alors le point considéré est un extremum. Pour savoir si les deux valeurs propres sont positives ou négatives, il suffit alors de calculer la trace de la matrice (somme des éléments diagonaux). En effet, la trace correspond à la somme des valeurs propres, et donc si la trace est positive, les deux valeurs propres sont positives et l'on a donc affaire à un minimum local, alors que si la trace est négative, les deux valeurs propres sont négatives et l'on a affaire à un maximum local.

Dans la situation proposée dans cet exercice, cette discussion montre clairement que $(0, 0)$ est un point selle alors que $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ est un maximum local, avec $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$.

b) Ayant déterminé les points stationnaires, qui sont les premiers candidats pour connaître les points de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels la fonction f prend ses valeurs extrémales, il nous maintenant étudier f

sur le bord de son domaine de définition, c'est-à-dire sur le bord du compact K. Pour ce faire, on va considérer successivement la restriction de f à chacun des côtés de ce carré. Notons $f_b(x) := f(x,-1)$ (la lettre b est choisie pour "bas", il s'agit effectivement de la restriction de f sur le côté en bas du carré). Il suffit maintenant d'étudier la fonction d'une seule variable $f_b : [-1,1] \ni x \mapsto f_b(x) = -3x - 3x^2 + 1 \in \mathbb{R}$. Tout comme pour la fonction f, les extrema de la fonction f_b se situent soit sur les points stationnaires, soit sur le bord du domaine de définition, en l'occurence -1 et 1. On obtient alors facilement que f_b admet un maximum en $-\frac{1}{2}$ et que $f_b(-\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2},-1) = \frac{7}{4}$.

En faisant de même pour $f_h(x) := f(x,1) = 3x - 3x^2 - 1$, $f_g(y) := f(-1,y) = -3y - 3 - y^3$ et $f_d(y) := f(1,y) = 3y - 3 - y^3$ et en déterminant dans chaque cas le maximum de la fonction sur l'intervalle $[-1,1]$, on obtient finalement que la valeur maximale prise par f sur le bord de K est $\frac{7}{4}$ prise sur le point $(-\frac{1}{2},-1)$. Clairement, ce point n'est pas un point stationnaire, mais les valeurs extrémales prises par une fonction continue f sont soit atteintes sur les points stationnaires, soit sur le bord du domaine, ce qui est le cas dans cet exemple.

Exercice 2.
On considère les applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, toutes suffisamment dérivables sur $\mathbb{R}^3$. Démontrer les relations suivantes :

(a) $\operatorname{div}(f\ F) = f \operatorname{div}(F) + \operatorname{grad}(f) \cdot F$,
(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$,
(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$,
(d) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(F)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(F)) - \Delta F$.

Réponse : Pour simplifier les expressions suivantes, on notera ∂_j pour $\frac{\partial}{\partial x_j}$ avec $j \in \{1,2,3\}$, et $F = (F_1, F_2, F_3)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fF) &= \partial_1(fF_1) + \partial_2(fF_2) + \partial_3(fF_3) \\ &= (\partial_1 f)F_1 + f(\partial_1 F_1) + (\partial_2 f)F_2 + f(\partial_2 F_2) + (\partial_3 f)F_3 + f(\partial_3 F_3) \\ &= \operatorname{grad}(f) \cdot F + f \operatorname{div}(F). \end{aligned}$$

De façon similaire, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) &= \operatorname{div}(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \\ &= \partial_1\partial_2 F_3 - \partial_1\partial_3 F_2 + \partial_2\partial_3 F_1 - \partial_2\partial_1 F_3 + \partial_3\partial_1 F_2 - \partial_3\partial_2 F_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\partial_i\partial_j F_k = \partial_j\partial_i F_k$ si F est de classe C^2. De même :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) &= \operatorname{rot}(\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f) \\ &= (\partial_2\partial_3 f - \partial_3\partial_2 f, \partial_3\partial_1 f - \partial_1\partial_3 f, \partial_1\partial_2 f - \partial_2\partial_1 f) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

que l'on écrit généralement simplement comme 0, l'origine des coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. Finalement, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(F)) &= \operatorname{rot}(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \\
&= \Big(\partial_2(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) - \partial_3(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3), \partial_3(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) - \partial_1(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1), \\
&\quad \partial_1(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) - \partial_2(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)\Big) \\
&= \Big(\partial_1(\partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 + \partial_1 F_1) - \partial_1^2 F_1 - \partial_2^2 F_1 - \partial_3^2 F_1, \\
&\quad \partial_2(\partial_1 F_1 + \partial_3 F_3 + \partial_2 F_2) - \partial_2^2 F_2 - \partial_1^2 F_2 - \partial_3^2 F_2, \\
&\quad \partial_3(\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3) - \partial_3^2 F_3 - \partial_1^2 F_3 - \partial_2^2 F_3\Big) \\
&= \operatorname{grad}(\operatorname{div}(F)) - (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)
\end{aligned}$$

la dernière expression s'écrivant de façon condensée ΔF. Nous soulignons que l'expression obtenue est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^3$, dont la i$^{\text{ème}}$ composante est $\partial_i(\operatorname{div}(F)) - \Delta F_i$.

Exercice 3.
Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, et si oui, déterminer leurs potentiels scalaires.

1. $\vec{V}(x, y) = (y, x)$,
2. $\vec{V}(x, y) = (3x^2 y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$,
3. $\vec{V}(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$,
4. $\vec{V}(x, y) = (y + \dfrac{1}{x}, x + \dfrac{1}{y})$,
5. $\vec{V}(x, y) = (x + y, x - y)$,
6. $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$.

Réponse : Pour les 5 premiers exemples, un moyen de s'assurer que

$$V : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (V_1(x, y), V_2(x, y)) \in \mathbb{R}^2$$

est issu d'un potentiel ϕ est de vérifier que $\partial_2 V_1 = \partial_1 V_2$. Mais attention, cette vérification demande que V soit différentiable, ce qui peut ne pas être vrai bien que V puisse être issu d'un potentiel. Cependant, cette situation n'arrive pas dans les exemples suivants, les fonctions V étant toujours différentiables, et même de classe C^∞. On ne donne dans la suite que la fonction ϕ, et des commentaires si nécessaires.

1. $\phi(x, y) = xy + \text{cte}$,
2. $\phi(x, y) = x^3 y + x^2 + y^3 x - y^2 + \text{cte}$,
3. $\phi(x, y) = \sin(x) - \cos(y) + \text{cte}$,
4. $\phi(x, y) = xy + \ln(|x|) + \ln(|y|) + \text{cte}$, mais attention, ni V ni ϕ ne sont définis sur l'ensemble des $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$, et ne peuvent pas être prolongés par continuité sur cet ensemble. On doit donc considérer séparément les 4 quadrants ouverts, et raisonner indépendamment pour chacun. En particulier, le choix de la constante peut être différent sur chacun des quadrants. Finalement, il faut faire attention à ce que la fonction ln n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\frac{\mathrm{d}\ln(|x|)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

5. $\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + \text{cte}$,
6. $\phi(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 - xyz + \text{cte}$, et dans ce cas, on a vérifié que $\text{rot}(V) = 0$ pour s'assurer préalablement que V est issu d'un potentiel.

Exercice 4.
Un champ central dans $\mathbb{R}^3$ est défini par une application $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la forme $V(x) = f(r)x$, où $x \in \mathbb{R}^3$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et f est une application dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer le potentiel dont il est issu.

Réponse : Soit V un champ central. On va montrer que si V est différentiable, alors on a toujours $\text{rot}(V) = 0$, d'où l'on conclut que $V = \text{grad}(\phi)$ pour une certaine fonction $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (par le théorème de Poincaré que vous avez vu au cours).

En effet, on a pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\text{rot}(V)(x) = (\partial_2 V_3(x) - \partial_3 V_2(x), \partial_3 V_1(x) - \partial_1 V_3(x), \partial_1 V_2(x) - \partial_2 V_1(x))$$
$$= \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}(r)\frac{\partial r}{\partial x_2}x_3 - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}(r)\frac{\partial r}{\partial x_3}x_2, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}(r)\frac{\partial r}{\partial x_3}x_1 - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}(r)\frac{\partial r}{\partial x_1}x_3, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}(r)\frac{\partial r}{\partial x_1}x_2 - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}(r)\frac{\partial r}{\partial x_2}x_1\right)$$

ce qui est nul car $\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}$, et donc $\frac{\partial r}{\partial x_i}x_j - \frac{\partial r}{\partial x_j}x_i = \frac{1}{r}(x_i x_j - x_j x_i) = 0$.

Pour déterminer ϕ, supposons que ce potentiel est radial, c'est-à-dire $\phi(x) = \tilde{\phi}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) = \tilde{\phi}(r)$. On a alors $[\partial_j \phi](x) = \frac{\mathrm{d}\tilde{\phi}}{\mathrm{d}r}(r)\,\frac{\partial r}{\partial x_j} = \tilde{\phi}'(r)\,\frac{x_j}{r} = \frac{1}{r}\,\tilde{\phi}'(r)\,x_j$. En identifiant cette expression avec $f(r)x_j$, on obtient que $\tilde{\phi}'(r) = r\,f(r)$, et donc $\tilde{\phi}$ est une primitive de l'application $\mathbb{R}_+ \ni r \mapsto r\,f(r) \in \mathbb{R}$, par exemple $\tilde{\phi}(r) = \int_0^r s\,f(s)\ \mathrm{d}s + \text{cte}$.

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse : A tout point (x,y) tel que $x \neq y$, l'application F est définie à partir des applications de classe $\mathcal{C}^1$ (voire $\mathcal{C}^2$), donc elle est de même classe. Ainsi, nous nous concentrons sur les points de la première bissectrice. Fixons-en un, soit (a,a).

Vérifions d'abord que F est continue en (a,a). Notons que cette vérification n'est pas nécessaire puisque l'objectif final de cet exercice est plus fort et peut être atteint directement. Néanmoins, le raisonnement permet d'apprécier ce qui suivra et peut y jeter quelque lumière. Comme f est différentiable sur $\mathbb{R}$, le théorème des accroissement finis montre que pour tout x et y, $x \neq y$, il existe c strictement entre x et y tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c).$$

Il en découle que si $x \neq y$, alors

$$\begin{aligned} F(x,y) - F(a,a) &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(a) \\ &= f'(c) - f'(a) \end{aligned}$$

Si $x = y$, alors $F(x,y) - F(a,a) = f'(x) - f'(a)$. Comme, par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (en particulier f' est continue à tout point de $\mathbb{R}$), chacune des deux expressions tend vers 0 quand (x,y) tend vers (a,a). La conclusion est que F est continue en (a,a).

Vérifions maintenant que les dérivées partielles de F sont définies au point (a,a). On utilisera de nouveau la formule de Taylor. Le raisonnement étant le même pour chacune des deux variables, on se contente de $\frac{\partial F}{\partial x}\big|_{(a,a)}$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Comme, d'après la formule de Taylor, il existe c entre a et $a+h$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(c),$$

on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{F(a+h,a) - F(a,a)}{h} &= \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)}{h} \\ &= \frac{f''(c)}{2}\ . \end{aligned}$$

Comme l'application f'' est continue en a,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f''(c)}{2} = \frac{f''(a)}{2}\ .$$

Le calcul qui précède nous donne la valeur des dérivées partielles au point (a,a). Il reste à vérifier la continuité des dérivées partielles en (a,a). Pour ce faire, nous avons besoin de connaître leurs expressions explicites aux points qui ne sont pas sur la première bissectrice. La règle du quotient nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{(x,y)} &= \frac{(x-y)f'(x) - (f(x) - f(y))}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{(x,y)} &= \frac{(y-x)f'(y) - (f(y) - f(x))}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor, si $x, y \in \mathbb{R}$ et $x \neq y$, alors il existe c entre x et y tel que

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}f''(c)(y-x)^2.$$

Il en découle (un petit calcul)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F}{\partial x}(a,a) = \frac{f''(c)}{2} - \frac{f''(a)}{2}\ .$$

Si $x = y$ alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F}{\partial x}(a,a) = \frac{f''(x)}{2} - \frac{f''(a)}{2}\ .$$

Dans chaque cas, la continuité de f'' en a montre que cette différence tend vers 0, d'où la continuité de $\frac{\partial F}{\partial x}$ en (a,a). Un raisonnement symétrique donne la réponse pour $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Exercice 6.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-y}\right)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition et calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.

Faire de même avec la fonction définie par $f(x,y) = x^y$ au voisinage du point $(1,0)$.

Réponse : Nous nous contentons de donner l'écriture compacte en faisant intervenir les matrices jacobienne et hessienne pour les deux fonctions.

Pour la première fonction, au voisinage de $(0,0)$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\pi}{4} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x \;\; y) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(||(x,y)||^2) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + o(||(x,y)||^2) \; . \end{aligned}$$

Quant à la deuxième, au voisinage de $(1,0)$,

$$\begin{aligned} f(1+x,y) &= 1 + \frac{1}{2}(x \;\; y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(||(x,y)||^2) \\ &= 1 + xy + o(||(x,y)||^2) \; . \end{aligned}$$