UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 8

28 avril 2008

Exercice 1.
On considère la fonction $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^y - y^x$.

1. Représenter graphiquement les points de la courbe $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.
2. Quels sont les points de Γ où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas ?

Réponse : 1) On commence par considérer les équivalences suivantes pour $(x, y) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$:

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y\ln(x)} = e^{x\ln(y)} \\ &\Leftrightarrow \quad y\ln(x) = x\ln(y) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y}\ . \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $h : \mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \in \mathbb{R}$, on obtient que $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $h(x) = h(y)$. Déterminer Γ revient donc à étudier la fonction h. Plus précisément, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, on doit chercher toutes les valeurs possibles de $y \in \mathbb{R}_+^*$ telles que $h(y) = h(x)$. Evidemment, la solution $y = x$ est possible, et donc Γ comprend la demi-droite $\{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}_+^*\}$.

Pour déterminer les autres solutions possibles de l'équation $h(y) = h(x)$, une étude assez précise de la fonction h est nécessaire. On trouve facilement que $h'(x) = 0$ si et seulement si $x = e$, avec $h(e) = \frac{1}{e}$, et également $h(1) = 0$, $\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. On vérifie alors graphiquement que l'équation

$$h(x) = c \tag{1}$$

admet une unique solution si $c \leq 0$, avec alors $x \in]0, 1]$, que (1) admet deux solutions pour $c \in]0, \frac{1}{e}[$, avec alors une solution pour $x \in]1, e[$ et l'autre dans $]e, \infty[$, et que (1) admet à nouveau une unique solution si $c = \frac{1}{e}$, avec $x = e$. Pour $c > \frac{1}{e}$, l'équation (1) n'admet pas de solution.

On en conclut que pour $x \leq 1$, l'équation $h(y) = h(x)$ implique que $y = x$, que pour $x \in]1, e[$ cette équation admet deux solutions, l'une donnée par $y = x$ et l'autre par une certaine valeur $y \in]e, \infty[$, et que cette équation admet à nouveau une unique solution pour $x = e$, avec $y = x$. Par symétrie, pour $x > e$ l'équation $h(y) = h(x)$ admet deux solutions, l'une donnée par $y = x$ et l'autre par une certaine valeur $y \in]1, e[$. Pour $x \in]1, e[\cup]e, \infty[$, nous posons $y =: \phi(x)$ pour la solution de l'équation $h(x) = h(y)$ avec $y \neq x$. Dans la suite de l'exercice, nous étudions plus précisément cette application ϕ au moyen du théorème des fonctions implicites.

2) Pour ce faire, calculons $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour un point $(x, y) \in \Gamma$, c'est-à-dire vérifiant $x^y = y^x$ (ou de façon équivalente $\ln(x) = \frac{x}{y}\ln(y)$). Pour un tel point, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{y\ln(x)}\ln(x) - e^{x\ln(y)}\frac{x}{y} = x^y\big(\ln(x) - \frac{x}{y}\big) = x^y\frac{x}{y}\big(\ln(y) - 1\big)\ .$$

Or, une telle expression ne s'annule que pour $y = e$, et comme (x, y) appartient à Γ, que pour $(x, y) = (e, e)$. La conclusion est qu'en dehors du point (e, e), le théorème des fonctions implicites s'applique en tous les points de Γ. De plus, la fonction f étant de classe C^∞ sur son domaine de définition, la fonction ϕ obtenue par le théorème des fonctions implicites dans un voisinage d'un point $(x, y) \in \Gamma$ sera également de classe C^∞ sur son domaine.

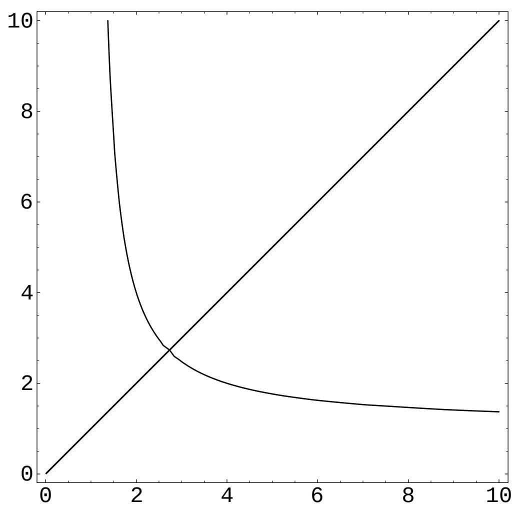
En considérant le graphe de h, on observe que $\lim_{x\to 1_+} \phi(x) = +\infty$ et que $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 1$. Ici, la notation $\lim_{x\to a_\pm}$ signifie la limite par valeurs de x supérieures, respectivement inférieures, à a. Ce résultat s'obtient en traçant les lignes de niveau de h, c'est-à-dire l'intersection du graphe de h avec des droites horizontales d'équation $y = c$ avec $c \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$ et en faisant tendre c vers 0. Les deux points d'intersection ont pour coordonnées (x, c) et $(\phi(x), c)$ pour un certain x vérifiant (1) et appartenant à $]1, e[\ \cup\ ]e, \infty[$. Par la même occasion, on constate que l'application ϕ est strictement décroissante sur son domaine de définition, ceci étant dû au fait que h est strictement croissante sur $]0, e[$, et strictement décroissante sur $]e, \infty[$. On observe également sur le graphe de h que $\lim_{x\to e_-} \phi(x) = e = \lim_{x\to e_+} \phi(x)$.

Calculons finalement la pente de ϕ en un point $(x, \phi(x)) \in \Gamma$, avec $x \in]1, e[\ \cup\ ]e, \infty[$. Par le théorème des fonctions implicites, on a

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))} = \frac{x^{\phi(x)}\ \frac{\phi(x)}{x}\ (\ln(x) - 1)}{x^{\phi(x)}\ \frac{x}{\phi(x)}\ (\ln(\phi(x)) - 1)} = \frac{\phi(x)^2}{x^2}\ \frac{\ln(x) - 1}{\ln(\phi(x)) - 1}\ .$$

Comme l'on pouvait s'y attendre, on a $\lim_{x\to 1_+} \phi'(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} \phi'(x) = 0$. Par ailleurs, $\lim_{x\to e_-} \phi'(x)$ et $\lim_{x\to e_+} \phi'(x)$ sont des formes indéterminées. Cependant, on appliquant la règle de l'Hôpital, on obtient que $\lim_{x\to e_\pm} \phi'(x) = \lim_{x\to e_\pm} \frac{\phi(x)}{x}\ \frac{1}{\phi'(x)}$, avec pour uniques solutions $\phi'(e) = \pm 1$. La fonction ϕ étant décroissante, uniquement la solution $\phi'(e) = -1$ est correcte. Ainsi, ϕ peut être prolongé continument en $x = e$. Notons que la pente $+1$ correspond à la tangent à la demi-droite $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_+^*\} \subset \Gamma$ au point (e, e).

Pour conclure, nous ajoutons la représentation graphique de Γ obtenue numériquement :



Exercice 2 (Reprise de la fiche 7).
La spirale logarithmique est définie par l'application

$$\begin{array}{rcccc} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t). \end{array}$$

Dans cet exercice nous supposerons $a \in \mathbb{R}_+^*$. On posera $x(t) = e^{at}\cos t$ et $y(t) = e^{at}\sin t$.

1. *Dessiner la spirale logarithmique. Pour vous guider, répondez aux questions suivantes :*

1.1 *Calculer les valeurs de t pour lesquelles $x(t) = 0$. Résoudre la même question pour y.*
Réponse : Il suffit de constater que $x(t) = 0$ si et seulement si $\cos(t) = 0$ si et seulement si $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Le même type raisonnement en remplaçant $\cos(t)$ par $\sin(t)$ permet de conclure que $y(t) = 0$ si et seulement si $t = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1.2 *Déterminer la pente de la tangente aux valeurs de t trouvées dans le point précédent.*
Réponse : Il faut d'abord calculer les dérivées des deux coordonnées par rapport à t. On obtient

$$\begin{aligned} x'(t) &= e^{at}(a\cos(t) - \sin(t)) \\ y'(t) &= e^{at}(a\sin(t) + \cos(t)) \ . \end{aligned}$$

La pente de la tangente s'exprime alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a\sin(t) + \cos(t)}{a\cos(t) - \sin(t)} \ .$$

Ainsi, quand $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, la pente de la tangente est $-a$. Quand $t = k\pi$, elle est $\frac{1}{a}$.

1.3 *Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente s'annule.*
Réponse : Ce sont les valeurs de t pour lesquelles le numérateur de $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ s'annule. En d'autres termes nous cherchons à résoudre l'équation $a\sin(t) + \cos(t) = 0$. Ceci équivaut aux valeurs $t = \arctan\left(-\frac{1}{a}\right) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

1.4 *Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la pente de la tangente n'est pas définie.*
Réponse : Le raisonnement identique à celui du point précédent appliqué cette fois-ci au dénominateur de la pente de la tangente donne $t = \arctan(a) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. *Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.*
Réponse : La réponse est consiste à vérifier l'égalité suivante :

$$\int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}(e^{at} - 1) \ .$$

3. *Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0,0)$ quand $t \mapsto -\infty$.*
Réponse : Il suffit de se rappeler que $|e^{at}\cos(t)| \leq e^{at}$ et $|e^{at}\sin(t)| \leq e^{at}$ et que $\lim_{t \to -\infty} e^{at} = 0$.

4. *Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.*
Réponse : La valeur de cette limite découle du calcul fait au point 2 :

$$-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \ .$$

5. *Montrer que la tangente à la spirale logarithmique en tout point de celle-ci fait un angle constant avec la droite joignant ce point à l'origine.*
Réponse : Comme la fonction cos est une application continue, il suffit de vérifier que l'angle entre les vecteurs (x, y) et (x', y') est constant. Cette vérification utilise le produit scalaire et l'identité :

$$(x, y).(x', y') \ = \ ||(x, y)|| \ ||(x', y')|| \ \cos(\theta) \ ,$$

θ étant l'angle entre les deux vecteurs. Dans notre situation, il découle de cette égalité que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \ .$$

Exercice 3.
Paramétrer la courbe dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Réponse : Dans cet exercice, il suffit de constater que le membre de gauche se met sous la forme suivante :

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \ .$$

Alors on obtient la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} 2\cos(t)+2 \\ 2\sin(t)+1 \end{array} \right. \end{array}$$

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer les intégrales $\int_\gamma f \ \mathrm{d}s$ dans les cas suivants, en parcourant toujours les chemins dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :

1. $f(x,y) = x^2 + y^3$ et γ est le bord du triangle de sommets $(0,0), (1,0)$ et $(0,1)$,
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ et γ est le cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 2.
3. $f(x,y) = xy$ et γ est le quart d'ellipse d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ situé dans le quart de plan $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Réponse : 1. Une erreur assez fréquente est de croire que la réponse à cette question fait intervenir une intégration double sur le triangle de l'énoncé. Au contraire, comme indiqué dans l'énoncé, l'intégration se fait sur le bord du triangle, une région de $\mathbb{R}^2$ de *dimension 1*. Plus rigoureusement, il s'agit d'une région qu'on peut décrire, et c'est exactement le coeur de la question, par une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$, en d'autres termes un *paramétrage*.

Il peut exister plusieurs possibilités de paramétrage. Ce n'est pas une source de soucis puisqu'un choix correct suffira. La réponse est indépendante du choix pourvu que celui-ci soit correct.

Dans ce cas particulier, notre choix est de considérer séparément les trois segments de droites que sont les arêtes du triangle. La somme des valeurs obtenues sur les trois segments fournira le résultat final.

Dépendant des cas particuliers, il existe maintes façons de paramétrer un segment de droite entre deux points A et B fixés dans $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Mais il existe une méthode générale qu'il faut retenir pour des raisons qui vont au delà de ce cours. Si A et B sont décrits par les coordonnées $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ respectivement et qu'on veut se déplacer du point A vers le point B sur le segment de droit qui les joint, alors on définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & t & \longmapsto & ((1-t)x_1, \ldots, (1-t)x_p) + (ty_1, \ldots, ty_p) \end{array}$$

Après regroupement des coordonnées, on obtient

$$\gamma(t) = ((1-t)x_1 + ty_1, \ldots, (1-t)x_p + ty_p)$$

Intuitivement, ce paramétrage vous dit qu'au temps $t = 0$ vous êtes au point A duquel vous vous déplacez, sur un segment de droite, au point B où vous serez au temps $t = 1$.

Dans notre cas particulier, cette méthode générale donne les trois paramétrages suivants :

du point $(0,0)$ *au point* $(1,0)$:

$$\begin{array}{cccccc} \gamma_1 & : & [0,\ 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (t, 0) \end{array}$$

du point $(1,0)$ *au point* $(0,1)$:

$$\begin{array}{cccccc} \gamma_2 & : & [0,\ 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (1-t, t) \end{array}$$

du point $(1,0)$ *au point* $(0,0)$:

$$\begin{array}{cccccc} \gamma_3 & : & [0,\ 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (0, 1-t) \end{array}$$

Ces paramétrages correspondent respectivement aux intégrales suivantes :

du point $(0,0)$ *au point* $(1,0)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x(t)^2 + y(t)^3)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt &= \int_0^1 t^2\sqrt{1+0}\ dt \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

du point $(1,0)$ *au point* $(0,1)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x(t)^2 + y(t)^3)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt &= \int_0^1 ((1-t)^2 + t^3)\sqrt{2}\ dt \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

du point $(0,1)$ *au point* $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x(t)^2 + y(t)^3)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt &= \int_0^1 (1-t)^3\ dt \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

La somme de ces trois valeurs est le résultat recherché : $\frac{7(1+\sqrt{2})}{12}$.

2. Un paramétrage du cercle en question est

$$\begin{array}{cccl} \gamma & : & [0,\ 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (2\cos(t)+1,\ 2\sin(t)+1) \end{array} .$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(x,y)ds &= \int_0^{2\pi} [(2\cos(t)+1)^2 + (2\sin(t)+1)^2]\sqrt{(-2\sin(t))^2 + (2\cos(t))^2}dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} [4 + 4\cos(t) + 4\sin(t) + 2]dt \\ &= 24\pi \end{aligned}$$

Il convient de faire la remarque suivante même si elle peut paraître accessoire. Dans l'intégration, Γ signifie la région décrite par le paramétrage γ, d'où la différence entre les deux lettres utilisées.

3. Voici le paramétrage de l'ellipse en question que nous utiliserons :

$$\begin{array}{cccl} \gamma & : & [0,\ \pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (5\cos(t),\ 3\sin(t)) \end{array} .$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(x,y)ds &= \int_0^{\pi/2} 15\sin(t)\cos(t)\sqrt{(-5\sin(t))^2 + (3\cos(t))^2}dt \\ &= 2\int_0^{\pi/2} 15\sin(t)\cos(t)\sqrt{16\sin(t)^2 + 9}dt \end{aligned}$$

Le reste de l'exercice est une bonne révision des techniques élémentaires d'intégration qui sont parmi les prérequis naturels de chaque cours en analyse. Une possibilité est de poser $u = 16\sin^2(t) + 9$, ce qui donne

$$\int_9^{25} \frac{15}{32}\sqrt{u}\ du = \frac{245}{8} .$$

Exercice 5.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ par

$$F(x,y) = (2xy, x^2 + y^2) .$$

Calculer l'intégrale de ce champ de vecteurs le long des arcs orientés suivants :

1. Le segment orienté d'origine $(0,0)$ et d'extrémité $(1,1)$,
2. L'arc de parabole d'équation $y = x^2$, du point $(0,0)$ au point $(1,1)$.

Quelle conjecture en déduisez-vous ? Démontrer votre affirmation.

Réponse : Les deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} t & \longmapsto & (t,t) \\ t & \longmapsto & (t,t^2) \end{array}$$

sont des paramétrages possibles pour les deux points respectifs. Dans le premier cas, l'intégrale qui en découle est

$$\begin{aligned}\int_\Gamma 2xydx + (x^2+y^2)dy &= \int_0^1 4t^2\ dt \\ &= 4/3;\end{aligned}$$

tandis que dans le deuxième on arrive au même résultat par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma 2xydx + (x^2+y^2)dy &= \int_0^1 (2t^3 + (t^2+t^4))\ dt \\ &= 4/3\ .\end{aligned}$$

La deuxième et plus importante moitié de l'exercice demande de démontrer que l'égalité des deux résultats n'est pas une coïncidence. Le raisonnement est en fait un cas particulier de ce que vous avez vu en cours. Le champ de vecteurs F est défini sur $\mathbb{R}^2$ qui est une région simplement connexe. On peut alors appliquer le théorème de Poincaré puisque

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}\ .$$

Il en découle que F est le champ de gradient d'une application f et que l'intégrale

$$\int_\Gamma F(x,y)\ ds \quad = \quad \int_\Gamma \mathrm{grad} f\ ds$$

ne dépend pas du choix de chemin Γ.

Exercice 6.
Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C (2x-y)\ \mathrm{d}x + (x+y)\ \mathrm{d}y$$

où C est le cercle de centre 0 et de rayon R, considéré avec l'orientation directe.

Réponse : Le paramétrage que nous utiliserons est celui donné par le passage aux coordonnées polaires :

$$\begin{array}{cccc}\gamma\ : & [0,\ 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (R\cos(t),\ R\sin(t))\end{array}\ .$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (2x-y)dx + (x+y)dy &= \int_0^{2\pi} ((2R\cos(t) - R\sin(t))(-R\sin(t)) + (R\cos(t) + R\sin(t))R\cos(t))\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} R^2\left(1 - \frac{\sin(2t)}{2}\right)\ dt \\ &= 2\pi R^2\ .\end{aligned}$$