UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 9

5 mai 2008

Exercice 1 (Hélice).
L'hélice circulaire à pas constant est définie par l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{array}\right. \end{array}$$

avec $r, h \in \mathbb{R}_+^*$.

1. *Montrer que le vecteur tangent à l'hélice en tout point de celle-ci fait un angle constant avec le vecteur vertical* $(0,0,1)$.
2. *Calculer la longueur d'une spire de l'hélice* ($t \in [0, 2\pi]$).

Réponse : Nous nous contentons de détailler le raisonnement pour le premier point et de ne fournir que la réponse pour le deuxième. Le point clé est la définition du produit scalaire. En effet, la possibilité de pouvoir parler d'un “produit scalaire” dans un espace vectoriel permet d'y introduire une *notion d'angle*. En particulier, si p est un naturel supérieur ou égal à 2 et que u, v sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^p$, alors leur produit scalaire est défini par l'identité que vous devez connaître :

$$u \cdot v \quad = \quad ||u|| \; ||v|| \; \cos(\theta) \ ,$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs. Grâce aux propriétés de la fonction cos, cette définition est sans ambiguïté.

Dans notre exercice, à chaque valeur de t, le vecteur tangent est défini par

$$(-r\sin(t), r\cos(t), h) \ .$$

En conséquence, son produit scalaire avec le vecteur $(0,0,1)$ est h qui est une constante. Comme la fonction cos est une application continue, et comme les vecteurs $(-r\sin(t), r\cos(t), h)$ et $(0,0,1)$ sont de longueur constante, on conclut que l'angle entre les deux vecteurs est constant aussi.

La réponse pour le deuxième point est $2\pi\sqrt{r^2+h^2}$.

Exercice 2 (Hélice 2).
Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$$

où Γ *est l'arc de l'hélice circulaire paramétrée par* $(r\cos(t), r\sin(t), ht)$*, avec* $r, h \in \mathbb{R}_+^*$ *fixés et* $t \in [0, 2\pi[$.

Réponse : Cette fois-ci il s'agit d'un chemin paramétré dans $\mathbb{R}^3$. Le paramétrage étant déjà donné, il ne reste qu'à intégrer :

$$\int_\Gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left[(r\sin(t) - ht)(-r\sin(t)) + (ht - r\cos(t))r\cos(t) + (r\cos(t) - r\sin(t))h\right]\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-r^2 + hrt\sin(t) + hrt\cos(t)\right]\, dt \\
&= \textit{il est temps de vous entraîner.} \\
&= -2\pi(r^2 + rh)
\end{aligned}
$$

Exercice 3 (Intégrale 2 dim).
1) Calculer $\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *où* D *est la partie du plan délimitée par les droites d'équation :*

$$x = 0, \quad y = x+2, \quad y = -x$$

Réponse :

$$
\begin{aligned}
\int\int_D (x-y)\, dydx &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{-x}^{x+2} (x-y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^{x+2} dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left[x(x+2) - \frac{(x+2)^2}{2} + x^2 + \frac{x^2}{2} \right] dx \\
&= \int_{-1}^{0} (2x^2 - 2)\, dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x \right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{-4}{3}.
\end{aligned}
$$

Rappelons que le théorème de Fubini est indispensable pour ce qui précède et pour ce qui suit. Dans ce premier point, commencer l'intégration par la variable y évite d'avoir deux termes à intégrer.

2) Calculer $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *où* D *est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :*

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

Réponse :

$$
\begin{aligned}
\int\int_D xy\, dydx &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} xy\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{x^3}^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^5 - x^7}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{48}.
\end{aligned}
$$

3) Calculer $\iint_D e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *sur le carré* $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Réponse :

$$\begin{aligned}\int\int_D e^{x+y}\ dydx &= \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}\ dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{x-1}^{-x+1} e^{x+y}\ dy\right)dx\\ &= e - e^{-1}.\end{aligned}$$

Exercice 4 (Intégrale 3 dim).
Calculer l'intégrale $\int\int\int_D (x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$*, où* D *est la partie de l'espace délimitée par les plans d'équation :*

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$

Réponse :

$$\begin{aligned}\int\int\int (x+y+z)^2\ dxdydz &= \int_0^1\left(\int_0^{1-z}\left(\int_0^{1-y-z}(x+y+z)^2\ dx\right)dy\right)dz\\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-z}\left[\frac{(x+y+z)^3}{3}\right]_0^{1-y-z} dy\right)dz\\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-z}\left[\frac{1}{3}-\frac{(y+z)^3}{3}\right]\ dy\right)dz\\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-z}\left[\frac{y}{3}-\frac{(y+z)^4}{12}\right]_0^{1-z}\right)dz\\ &= \int_0^1\left[\frac{1-z}{3}-\frac{1}{12}+\frac{z^4}{12}\right]dz\\ &= \left[\frac{z}{3}-\frac{z^2}{6}-\frac{z}{12}+\frac{z^5}{60}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

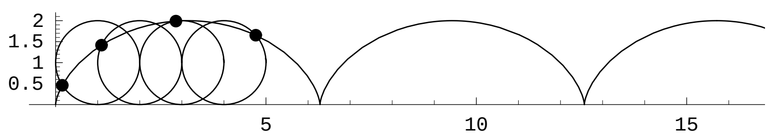
Exercice 5 (cycloïde).
Une *cycloïde* est définie par la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a(t-\sin t)\\ y(t) = a(1-\cos t), \qquad t \in \mathbb{R}\ .\end{cases}$$

1) Représenter aussi précisément que possible une arche de la cycloïde ($t \in [0, 2\pi]$).

2) Déterminer l'aire de la surface délimitée par une arche de la cycloïde et l'axe des x.

Réponse :



1) Pour faire le dessin, allez observer une roue de vélo : marquez un point blanc sur la roue et suivez-le des yeux quand le vélo se déplace. Vous verrez alors une cycloïde. Vous remarquerez également

que le vecteur tangent à la courbe au point $(x(t), y(t))$ est donné par le vecteur $(a(1-\cos(t)), a\sin(t))$ et que la pente de ce vecteur au point $(x(t), y(t))$ est donné par $m(t) = \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}$. Pour $t = 2\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$ la tangente n'est pas définie : c'est le point de rebroussement, quand votre point blanc touche le sol. Quand $t = \pi + 2\pi k$, la pente s'annule : le point blanc est le plus éloigné de la route.

2) Comme il n'est pas possible d'obtenir y comme fonction de x, et donc de calculer l'aire d'une arche de cycloïde avec une intégrale double usuelle, on va recourir au théorème de Green-Riemann. En effet, on a

$$\text{Aire} = \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_\Gamma -y\ \mathrm{d}x = \int_\Gamma x\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_\Gamma (-y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y)\ ,$$

où Γ est la courbe fermée formée par une arche de la cycloïde et le segment reliant $(0,0)$ à $(2\pi a, 0)$ parcourue positivement, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. En prenant alors la paramétrisation $\gamma : [0, 2\pi a] \ni t \mapsto (t, 0) \in \mathbb{R}^2$ pour le segment horizontal, et la paramétrisation donnée pour la cycloïde, parcourue de $t = 2\pi$ à $t = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\text{Aire} &= \int_\Gamma -y\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{2\pi a} 0\ \mathrm{d}t - \int_{2\pi}^{0} y(t)x'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} a^2\left(1-\cos(t)\right)^2\ \mathrm{d}t \\
&= a^2\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\ \mathrm{d}t \\
&= a^2\Big(2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t\Big) \\
&= 3\pi a^2\ .
\end{aligned}$$

Exercice 6 (Entraînement).
Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma -y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y$, où Γ est l'intersection de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1, et du plan d'équation $x + y + z = 1$, en indiquant le sens choisi du parcours.

Réponse : Une stratégie pour résoudre ce problème est de réduire le nombre de variables en utilisant le système d'équations donné et ensuite de procéder en utilisant les techniques de la méthode de Gauss pour arriver à l'équation d'un cercle. Le reste du travail est assez similaire à vos expériences précédentes.

On commence donc par poser $z = 1 - x - y$ en utilisant l'équation du plan. L'intersection avec la sphère permet alors d'écrire $x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 = 1$. Cette dernière équation équivaut à

$$x^2 + y^2 + xy - x - y = 0.$$

Le membre de droite de cette équation, puisque c'est un polynôme de deux variables et de degré 2, nous permet d'obtenir des carré complets en utilisant la méthode de Gauss. Plus précisément, l'équation de l'intersection de la sphère et du plan en question est

$$\Big(x + \frac{y}{2}\Big)^2 + \frac{3y^2}{4} - x - y = 0.$$

On peut alors poser

$$\begin{cases} u &= x + \frac{y}{2} \\ v &= \frac{\sqrt{3}y}{2} \end{cases}$$

Notons que la transformation linéaire inverse est décrite par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & u - \frac{v}{\sqrt{3}} \\ y & = & \frac{2}{\sqrt{3}}v \end{array}\right.$$

Après calcul, on arrive à l'équation suivante :

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Il s'agit du cercle dans le plan uv d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{2} \\ v & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t + \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Dans le plan xy ceci correspond à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{3} \\ y & = & \frac{2}{3}\sin t + \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Nous avons réussi à obtenir une paramétrisation de l'intersection sur laquelle il faut intégrer la forme $-y\ dx + x\ dy$. Ceci se fait de la manière suivante quitte à fournir quelques détails simples :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Gamma -y\ dx + x\ dy & = & \displaystyle\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sin t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t + \frac{1}{3}\cos t\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{3}\sin t\right)\frac{2}{3}\cos t\right]\ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3\sqrt{3}}\sin t + \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]\ dt \\ & = & \displaystyle\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}. \end{array}$$