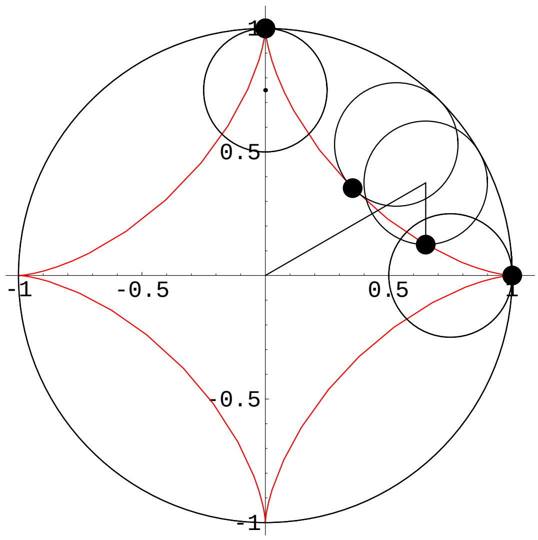
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 10

19 mai 2008

Exercice 1.
Un *astroïde* est la courbe de $\mathbb{R}^2$ construite de la façon suivante : On considère un cercle de rayon $\frac{1}{4}$ avec un point distingué (cf. dessin ci-dessous) situé initialement au point $(0,1)$. On fait rouler ce cercle à l'intérieur d'un cercle de rayon 1 et de centre $(0,0)$. L'astroïde est alors composé de toutes les positions successives du point distingué.



1. Montrer que l'astroïde peut être paramétrisé par l'application
$$[0,2\pi[\ \ni \ t \mapsto (\cos^3(t), \sin^3(t)) \in \mathbb{R}^2.$$
2. Calculer la longueur d'un quart de l'astroïde.
3. Déterminer l'équation de la tangente au point $(\cos^3(t), \sin^3(t))$ ainsi que les intersections de cette droite avec les deux axes, puis calculer la longueur du segment entre ces deux points.

Exercice 2.
Soit (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) les sommets successifs d'un polygone convexe.

1. Calculer l'intégrale curviligne $\frac{1}{2}\int_\gamma x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$, où γ est la courbe fermée et orientée positivement, formée par les bords du polygone.
2. Comparer avec l'aire du polygone pour $n = 3$ et $(x_3, y_3) = (0,0)$.

Exercice 3.
Montrer que les intégrales suivantes ne sont pas égales :

$$\int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}x \Big] \, \mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}y \Big] \, \mathrm{d}x \ ,$$

et expliquer pourquoi le théorème de Fubini n'est pas applicable.

<u>Indication</u> : On commencera par calculer les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{x}{x^2+y^2}\big) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\arctan(x)\big) \ .$$

Exercice 4.
Calculer les intégrales

1. $$\int_0^\infty e^{-x^2} \ \mathrm{d}x \ ,$$

2. $$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z \ ,$$

   où D est l'intérieur de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1, et extérieur au cône de révolution d'axe Oz et d'angle $\pi/3$.

Exercice 5 (Entraînement).
Calculer l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes d'équation

$$y = ax \ , \ y = x/a \ , \ y = b/x \ , y = 1/bx \ , \ \text{où} \ \ a > 1 \ , \ b > 1 \ .$$