UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 11

26 mai 2008

Exercice 1.
Calculer l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes d'équation

$$y = ax \ , \ y = x/a \ , \ y = b/x \ , y = 1/bx \ , \text{ où } \ a > 1 \ , \ b > 1 \ .$$

Exercice 2.
Calculer l'intégrale

$$\iint_C (x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

sur le domaine C contenant l'origine et délimité par le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{5}$, et la droite d'équation $x + y + 3 = 0$.

Exercice 3.
Montrer que la forme différentielle

$$w = 2xy^3e^z \, \mathrm{d}x + (3x^2y^2e^z + z^2) \, \mathrm{d}y + (x^2y^3e^z + 2yz + 3z^2) \, \mathrm{d}z$$

est exacte sur $\mathbb{R}^3$, et déterminer toutes ses primitives.

Exercice 4.
Trouver une fonction non nulle $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la forme différentielle

$$w = \phi(x)(x + y + 1)y \, \mathrm{d}x + \phi(x)(2y + x) \, \mathrm{d}y$$

soit exacte sur $\mathbb{R}^2$, et déterminer ensuite toutes ses primitives.

Exercice 5.
Calculer $\int_\Gamma P(x,y) \, \mathrm{d}x + Q(x,y) \, \mathrm{d}y$, avec pour $(x,y) \neq (1,0)$,

$$P(x,y) = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{x(x-1) + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \ ,$$

et pour Γ une courbe fermée et non intersectante de $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 par morceaux, orientée positivement et ne passant pas par $(1,0)$. Discuter les différents cas possibles.

Exercice 6 (Entraînement).
Soit Γ une courbe fermée et non intersectante dans $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 dont le domaine intérieur D est symétrique par rapport à $(0,0)$, c'est-à-dire $(x,y) \in D$ si et seulement si $(-x,-y) \in D$. Démontrer que

$$\int_\Gamma (\cos(xy) + x^3y + e^y) \, \mathrm{d}x + (xe^y + xy^3) \, \mathrm{d}y = 0 \ .$$

Exercice 7 (Entraînement).
Calculer le volume du domaine D défini par l'intersection d'une sphère de rayon $R > 0$ et d'un cylindre de révolution de rayon $R' > 0$, avec $R' < R$, ayant pour axe un diamètre de la sphère.