UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 12

27 mai 2008

Exercice 1.
On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$g(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{1 - x^2 - y}\ .$$

1. Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté D, sur lequel g est bien définie. Représenter graphiquement cet ensemble.
2. On note par Γ la frontière de D. Calculer

$$\min_{(x,y)\in\Gamma} g(x,y) \qquad \text{et} \qquad \max_{(x,y)\in\Gamma} g(x,y)\ ,$$

   et déterminer en quel point (x,y) de Γ ces valeurs sont atteintes.
3. Trouver les points critiques de g à l'intérieur de D, et déterminer la valeur de g en ces points.
4. En déduire la valeur minimale et la valeur maximale de g sur D.
5. Déterminer le développement de Taylor de g à l'ordre 1 au voisinage du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 2.
Soit l'ensemble

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

1. Dessiner D.
2. Soit C l'ensemble des points du bord de D. Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe C en un point $(x_0, y_0) \in C$, en supposant $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.
3. Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \iint_D (x - y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

   (a) en utilisant le changement de variables : $\left\{\begin{array}{l} x = 2r\cos(\theta) \\ y = 3r\sin(\theta)\ ; \end{array}\right.$

   (b) en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 3.
Dessiner avec précision la région.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|,|y|) = 2\}\ .$$

Donner explicitement un arc **dans cette région** qui joint le point $(2,0)$ au point $(-1,2)$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Faites en sorte que l'ensemble de départ de l'arc tout entier soit l'intervalle $[0,1]$ (*Il faudra donc faire un recollement de deux applications dont l'union des domaines est* $[0,1]$).