UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

# Math IV, analyse (L2) – Fiche 2

**3 mars 2008**

**Exercice 1.**
Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites vers le point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ :

$$(A) \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y); \quad (B) \lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)); \quad (C) \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)).$$

On considère les applications suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}.$$

Pour chacun fonction, déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel elle est bien définie, et montrer ensuite sur ces exemples que pour $(a,b) = (0,0)$ :

1. Deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième existe,
2. Une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres existent,
3. (B) et (C) peuvent exister sans être égales,
4. Si (A) et (B) existent alors elles sont égales.

**Exercice 2.**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de $f$ aux droites d'équation $y = mx$ pour tout $m \in \mathbb{R}$,
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de $f$ à la parabole d'équation $y = x^2$,
3. Montrer que $f$ n'a pas de limite à l'origine.

**Exercice 3.**
**1.** Soient $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma\ \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction

$$\begin{array}{rcll} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^\gamma} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Montrer que la fonction $f$ est continue si et seulement si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \gamma$.

**2.** Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{e^{x^2y}-1}{xy} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ x & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} (x^2+3x+2)\sin(\pi/y) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases} \end{array}$$

**Exercice 4.**

**1.** Etudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

**2.** Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour $(x,y) \to (0,0)$ et $(x,y)$ appartenant à l'ensemble de définition :

$$f(x,y) = \frac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{y\ln(y-x^2)}, \qquad f(x,y) = x^y.$$

**Exercice 5 (Entraînement).**

Calculer les limites quand $||(x,y)|| \to +\infty$ des fonctions suivantes (*le choix de la norme n'est pas précisé puisqu'elles sont toutes équivalentes sur* $\mathbb{R}^2$).

$$f(x,y) = \frac{x\arctan y}{x^2+y^2+1}, \qquad g(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}, \qquad h(x,y) = (1+|x|+|y|)\sin(y^2).$$