UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 3

11 mars 2008

Exercice 1 (Retour à la première fiche).
Vous avez déjà rencontré les ensembles suivants lors de votre périple. C'est une nouvelle rencontre. Comme chaque nouvelle rencontre, elle peut éventuellement apporter ses fruits. Essayez de voir si vous pouvez appliquer vos connaissances maintenant plus avancées sur les applications continues, pour vérifier avec moins de calcul si ces sont ensembles sont ouverts, s'ils sont fermés, et pour déterminer leur intérieur, leur adhérence et leur frontière.

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1 \text{ et } (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{16}\}$,
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$,
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \big(y - \frac{1}{n}\big)^2 \leq \frac{1}{4n^2}\}$.

Exercice 2.
Déterminer si les ensembles suivants sont compacts, connexes par arc :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$$

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2+z^2-4)(x^2+y^2+z^2-1) \leq 0\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } xy \leq 1\}$$

Exercice 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On note l sa limite. Montrer que l'ensemble $\{u_n \mid n \in N\} \cup \{l\}$ est compact.

Exercice 4.

1. Trouver une application continue f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et une partie ouverte $O \subset \mathbb{R}$ telles que $f(O)$ ne soit pas ouverte.
2. Trouver une application continue g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et une partie fermée $F \subset \mathbb{R}$ telles que $g(F)$ ne soit pas fermée.
3. Trouver une application continue h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et une partie compacte $C \subset \mathbb{R}$ telles que $h^{-1}(C)$ ne soit pas compacte.

Exercice 5.
On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ pour } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \sin(|xy|)\ .$$

1. Tracer les courbes de niveau $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ $g(x,y) = 1$.
2. Discuter de la continuité de ces fonctions en $(0,0)$ et calculer les dérivées partielles premières.
3. Vérifier si ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.
Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ une application continue telle que pour tout $x \in K$, $f(x) \neq x$. Montrer qu'il existe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $d(f(x),x) \geq \epsilon$ pour tout $x \in K$.