UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 4

17 mars 2008

Différentiabilité en un point

L'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est dite *différentiable* en $a \in \mathbb{R}^n$ si elle satisfait la condition

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - df(a)(h)||}{||h||} = 0$$

où $df(a)$ est la matrice par rapport à la base canonique d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ qui est en fait la matrice jacobienne de f évaluée au point a. Plus précisément

$$df(a) = \left(\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x=a} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Notons que dans cette fiche $m = 1$ et qu'alors les matrices jacobiennes se réduisent à des vecteurs lignes.

Propriétés importantes liées à la différentiabilité en un point

1. Si une application est différentiable en un point, alors elle y est continue. L'énoncé réciproque n'est pas vrai en général.

2. Si une application est différentiable en un point, alors toutes ses dérivées directionnelles en ce point existent. L'énoncé réciproque n'est pas vrai en général.

3. Si une application est de classe $\mathcal{C}^1$ en un point, alors elle y est différentiable. L'énoncé réciproque n'est pas vrai en général.

Exercice 1 (Gradient, lignes de niveau).
Soit M un point sur une colline et m la projection de M sur le plan horizontal. En coordonnées cartésiennes, si $M = (x, y, z)$, alors $m = (x, y, 0)$, et la coordonnée z du point M est donnée par la relation $z = f(x, y)$, où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction qui définit l'altitude de chaque point de la colline en fonction de x et y. On suppose que la projection du sommet de la colline a les coordonnées $(0, 0, 0)$, et que f est donnée par $f(x, y) = 5 - \frac{x^2}{4} - y^2$.

1. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau L_k pour $k \in \{0, 1, 4, 5\}$.
2. Esquisser la surface de la colline pour $z \geq 0$.
3. Calculer le gradient de f.
4. Trouver la direction de la plus grande pente de f au point $m = (1, 1/2, 0)$. Déterminer le vecteur unitaire correspondant.
5. Trouver les directions où la dérivée directionelle au point $m = (1, 1/2, 0)$ est zéro.

Exercice 2 (Gradient, composition).
On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto e^{3x+2y} \in \mathbb{R}$ et on pose $x = x(t) = \cos(t)$ et $y = y(t) = t^2$. Calculer de deux manières différentes la dérivée de la fonction

$$F : \mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) = g(x(t), y(t)),$$

une première fois directement, et une seconde fois comme une dérivée de fonction composée.

Exercice 3 (Jacobien, composition).
Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$f(x,y) = \Big(\frac{x}{(xy)^2+1},\, y\left((xy)^2+1\right)\Big)$$
$$g(x,y) = \Big(x\left((xy)^2+1\right),\, \frac{y}{(xy)^2+1}\Big).$$

1. Calculer les dérivées partielles de f et g là où elles existent.
2. Calculer $g \circ f$.
3. Vérifier que $f(1,1) = (1/2, 2)$ et trouver le produit des matrices $\mathrm{d}g(1/2,2)$ et $\mathrm{d}f(1,1)$.

Exercice 4.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire sa matrice jacobienne.

Exercice 5.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f au point $(0,0)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées dans toutes les directions.
4. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 6 (Entraînement).
Un des objectifs de cet exercice est d'illustrer que la condition d'être de classe $\mathcal{C}^1$ est plus forte que celle d'être différentiable. Nous étudions l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie ci-après :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer que f admet des dérivées partielles à l'origine mais que celles-ci n'y sont <u>**pas**</u> continues.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.