UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 5

31 mars 2008

Exercice 1 (Extréma).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extréma relatifs (locaux) de la fonction f.
2. La fonction f possède-t-elle des extréma absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \leq x \leq 0,\ y = x + 1\}$$

et déterminer les extréma absolus de la restriction de f à L en précisant en quels points de L ils sont atteints.

Exercice 2 (Extréma globaux).
On considère la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1. Etudier les extréma relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. On pourra utiliser les symétries de la fonction f pour réduire le nombre de cas à étudier.
2. Démontrer que $f(x, y) \to 0$ quand $\|(x, y)\| \to \infty$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence des extréma globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Exercice 3 (Multiplicateurs de Lagrange, inégalité).
1) Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid x_1 + \ldots + x_n = s\}$. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver la valeur maximale atteinte par f sur l'ensemble D.

2) En déduire que, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'inégalité : $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Exercice 4 (Formule de Taylor).
Dans cet exercice, toutes les séries seront obtenues des développements au voisinage de $(0, 0)$.

1) Déterminer les séries de Taylor des fonctions $(x, y) \mapsto e^{x^2+xy+y^2}$ et $(x, y) \mapsto e^{-x^2-xy-y^2}$ jusqu'au degré 2. Multiplier les deux polynômes obtenus et expliquer la structure du résultat.

2) Trouver la série de Taylor de $(x, y) \mapsto e^{x+y}$ jusqu'au degré 2. Si l'on substitue $x = y = 1/2$ dans le polynôme obtenu, qu'est-ce qu'on peut dire sur le nombre e ?

3) Reprendre le point 1) en explicitant les séries de Taylor jusqu'au degré 4, et le point 2) en calculant la série de Taylor jusqu'au degré 3.

Exercice 5 (Entraînement).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extréma locaux de f.
2. Montrer que $f(x,y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x,y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a-t-il un minimum global ?