UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours: O. Kravchenko
Institut Camille Jordan — Travaux dirigés: T. Altınel, T. Eisenkölbl & S. Richard

Math IV, analyse (L2) – Fiche 6

7 avril 2008

Exercice 1.
Déterminer la borne supérieure de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$

sur le compact $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Exercice 2.
On considère les applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, toutes suffisamment dérivables sur $\mathbb{R}^3$. Démontrer les relations suivantes :

(a) $\mathrm{div}(\mathrm{f}\ \mathrm{F}) = \mathrm{f}\ \mathrm{div}(\mathrm{F}) + \mathrm{grad}(\mathrm{f}) \cdot \mathrm{F}$,

(b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\mathrm{F})) = 0$,

(c) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\mathrm{f})) = 0$,

(d) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\mathrm{F})) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\mathrm{F})) - \Delta\mathrm{F}$.

Exercice 3.
Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, et si oui, déterminer leurs potentiels scalaires.

1. $\vec{V}(x, y) = (y, x)$,
2. $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$,
3. $\vec{V}(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$,
4. $\vec{V}(x, y) = (y + \dfrac{1}{x}, x + \dfrac{1}{y})$,
5. $\vec{V}(x, y) = (x + y, x - y)$,
6. $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$.

Exercice 4.
Un champ central dans $\mathbb{R}^3$ est défini par une application $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la forme $V(x) = f(r)x$, où $x \in \mathbb{R}^3$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et f est une application dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer le potentiel dont il est issu.

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-y}\right)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition et calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.

Faire de même avec la fonction définie par $f(x,y) = x^y$ au voisinage du point $(1,0)$.